Corrigé du brevet de technicien supérieur
Opticien–lunetier septembre 2020

Exercice 1 **10 points**

Partie A. Statistiques à 2 variables

1. Le coefficient de corrélation linéaire de cette nouvelle série $(t\,;\,z)$ est $r_2 \approx 0,999$, ce qui est plus proche de 1 (en valeur absolue) que le coefficient de corrélation $r_1 = 0,865$ de la série $(t;T)$, c'est pourquoi le changement de variable est pertinent.
2. Une équation de la droite de régression de z en t selon la méthode des moindres carrés est $z = 0,251t + 0,016$, avec des coefficients arrondis au millième.
3. Alors $z = \ln\left(\dfrac{1\,500}{1\,500 - T}\right)$ donc $\ln\left(\dfrac{1\,500 - T}{1\,500}\right) = -z$ donc $1 - \dfrac{T}{1\,500} = \mathrm{e}^{-z}$ et $T = 1\,500\,(1 - \mathrm{e}^{-z})$
   soit $T = 1\,500 - 1\,500\mathrm{e}^{-(0,251t+0,016)} = 1\,500 - 1\,500\mathrm{e}^{-0,016}\mathrm{e}^{-0,251t}$
   donc $T = Ae^{-0,251t} + 1\,500$ où $A = -1\,500\mathrm{e}^{-0,016} \approx 1\,476$ arrondi à l'unité.

Partie B. Résolution d'une équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0,25y = 0$ sont les fonctions de la forme $y = k\mathrm{e}^{-0,25t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. **a.** $g(t) = 1\,500$ donc $g'(t) + 0,25g(t) = 0 + 0,25 \times 1\,500 = 375$
   donc g est une solution de l'équation différentielle (E).

   b. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions de la forme $y = k\mathrm{e}^{-0,25t} + 1\,500$.
3. La condition initiale $h(0) = 24$ donne $k\mathrm{e}^{-0,25\times0} + 1\,500 = 24$ donc $k = -1476$
   par conséquent $h(t) = -1476\mathrm{e}^{-0,25t} + 1\,500$.

Partie C. Étude d'une fonction

1. $f'(t) = 369\mathrm{e}^{-0,25t}$ or $\mathrm{e}^{-0,25t} > 0$ donc $f'(t) > 0$ et f est strictement croissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 1\,500$

   b. La courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote dont l'équation est $y = 1\,500$

   c. Une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est $y = 369t + 24$

Partie D. Étude d'une suite

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+1} - 24 = 0,9u_n + 2,4 - 24 = 0,9u_n - 21,6 = 0,9(u_n - 24) = 0,9v_n$
   donc (v_n) est géométrique de raison 0,9 ; son premier terme est $v_0 = u_0 - 24 = 1500 - 24 = 1476$.
2. **a.** On en déduit que $v_n = 1476 \times 0,9^n$,

   b. or $u_n = v_n + 24$ donc pour tout entier naturel n, $u_n = 1\,476 \times 0,9^n + 24$.
3. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,9^n = 0$ donc par produit $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 1476 \times 0,9^n = 0$ et par somme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 24$.
   A long terme la température se rapproche de 24 °C.
4. En sortie de l'algorithme, la valeur de n est 70, ce qui signifie que la température descend en dessous de 25 °C au bout de 70 minutes, et pas avant.

Exercice 2 **10 points**

Partie A : Loi normale

1. La variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne 80 et d'écart-type $0,16$ donc la probabilité qu'une tige soit conforme est $P(79,63 \leqslant X \leqslant 80,37) \approx 0,979$ à la calculatrice.

   Par conséquent la probabilité qu'une tige prélevée au hasard dans la production ne soit pas conforme est $1 - 0,979 = 0,021$.

   (On peut aussi calculer $P(X < 79,63) + P(X > 80,37)$, on trouve la même réponse).
2. $P(X \leqslant 80,28) \approx 0,960$, à nouveau ce résultat est obtenu à l'aide de la calculatrice.

Partie B : Loi binomiale et loi de Poisson

1. On répète n fois, indépendamment (tirage avec remise), une épreuve à deux issues, le succès « la tige n'est pas conforme » de probabilité $p = 0,02$, et l'échec.

   La variable aléatoire Y qui compte le nombre de succès suit donc une loi binomiale.
2. Pour cette question, on prend $n = 50$ donc Y suit la loi $\mathscr{B}(50\ ;\ 0,02)$.

   La probabilité qu'il y ait exactement 2 tiges de longueur non conforme dans ce prélèvement est $P(Y = 2) \approx 0,186$, à l'aide de la calculatrice.
3. **a.** On approche $\mathscr{B}(200\ ;\ 0,02)$par la loi de Poisson de même espérance $\lambda = np = 200 \times 0,02 = 4$.

   b. En approchant Y par Z qui suit $\mathscr{P}(4)$, la probabilité d'avoir au plus 3 tiges de longueur non conforme est $P(Z \leqslant 3) \approx 0,433$.

Partie C : Test d'hypothèse

1. Sous l'hypothèse nulle $H_0 : \mu = 80$, $P(80 - h < \overline{L} < 80 + h) = 0,95$ pour $h = 2\sigma\left(\overline{L}\right) = 2 \times 0,016 = 0,032$.
2. On prélève un échantillon de 100 tiges du lot et on calcule leur longueur moyenne $\overline{l}$.

   Si $\overline{l} \in [79,968;80,032]$ alors on accepte H_0 sinon on rejette H_0, avec un risque d'erreur $\alpha = 0,05$.
3. $80,02 \in [79,968\ ;\ 80,032]$ donc on accepte H_0.

Partie D : évènements indépendants

1. Par indépendance de B et C, on a $P(B \cap C) = P(B) \times P(C) = 0,02 \times 0,05 = 0,001$.
2. La probabilité que la tige contrôlée ait au moins un des deux défauts est

   $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C) = 0,02 + 0,05 - 0,001 = 0,069$.
3. La probabilité que la tige contrôlée n'ait aucun des deux défauts est $P\left(\overline{B} \cap \overline{C}\right) = 1 - P(B \cup C) = 0,931$.