∾ Corrigé du brevet de technicien supérieur ∾ Opticien–lunetier 9 mai 2017

Exercice 1 **10 points**

A. Étude expérimentale du refroidissement

1. Le coefficient de corrélation linéaire de cette nouvelle série $(t\ ;\ z)$ est $r_2 \approx -0,997$, ce qui est plus proche de 1 en valeur absolue que le coefficient de corrélation $r_1 = -0,886$, par conséquent le changement de variable est pertinent.
2. Une équation de la droite de régression de z en t est $z = -0,15t + 4,01$, avec des coefficients arrondis au centième.
3. On en déduit que $\ln(T-20)$ donc $T - 20 = \mathrm{e}^{-0,15t+4,01} = \mathrm{e}^{-0,15t}\mathrm{e}^{4,01}$
   donc $T = 20 + 55\mathrm{e}^{-0,15t}$, où $C_0 = \mathrm{e}^{4,01} \approx 55$, arrondi à l'unité.

B. Étude théorique du refroidissement à l'aide d'une équation différentielle

1. L'équation (E) : $y' = -0,15(y-20)$ s'écrit aussi $y' = -0,15y + 3$ en développant, soit
   $y' + 0,15y = 3$.
2. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0,15y = 0$ sont les fonctions de la forme $y = k\mathrm{e}^{-0,15t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
3. La fonction constante g définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(t) = c$ est une solution particulière de l'équation différentielle (E) si $g'(t) + 0,15g(t) = 3$ pour tout $t \in [0;+\infty[$, ce qui revient à $0 + 0,15c = 3$ soit $c = 20$.
   Ainsi une solution de (E) est $g(t) = 20$.
4. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions $y = k\mathrm{e}^{-0,15t} + 20$.
5. La condition initiale $f(0) = 75$ se traduit par $k\mathrm{e}^{-0,15\times 0} + 20 = 75$ soit $k + 20 = 75$ donc $k = 55$ ainsi $f(t) = 55\mathrm{e}^{-0,15t} + 20$.

C. Exploitation du modèle précédent

1. D'après le tableau, la température de la monture au bout de 15 minutes est $f(15) \approx 26$ °C.
2. **a.** Pour tout $t \in [0;+\infty[$, $f'(t) = 55(-0,15)\mathrm{e}^{-0,15t} = -8,25\mathrm{e}^{-0,15t}$.
   b. Comme $\mathrm{e}^{-0,15t} > 0$ pour tout $t \in [0;+\infty[$,et $-8,25 < 0$, on a $f'(t) < 0$ sur cet intervalle et f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. **a.** $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,15t} = 0$ donc par produit $\lim\limits_{t\to+\infty} 55\mathrm{e}^{-0,15t} = 0$ et par somme $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 20$.
   b. On déduit de cette limite que la courbe $\mathscr{C}$ admet une asymptote d'équation $y = 20$ en $+\infty$.
4. Un logiciel de calcul formel fournit le développement limité à l'ordre 2 de la fonction f au voisinage de zéro.

▷ **Calcul formel**

	PolylnômeTaylor[20+55*exp(−0.15*t), t,0, 2]
1	$\to 75 - \dfrac{33}{4}t + \dfrac{99}{160}t^2$

Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse zéro est $y = 75 - \dfrac{33}{4}t$

(et $\mathscr{C}$ est au-dessus de T au voisinage de zéro car $\dfrac{99}{160}t^2 \geqslant 0$).

5. L'objectif de cette question est de déterminer à partir de quel instant la température de la monture en acétate est inférieure à 24 °C.

On considère l'algorithme suivant :

Initialisation
t prend la valeur 15
Traitement
Tant que $f(t) > 24$
t prend la valeur $t+1$
Fin de Tant que
Sortie
Afficher t

a. On a fait tourner l'algorithme « à la main » et complété le tableau.

Étapes	Valeurs de t	Valeurs de $f(t)$	Condition $f(t) > 24$	Affichage
étape 1	15	$f(15) \approx 25,8$	VRAIE	aucun
étape 2	16	$f(16) \approx 25,0$	VRAIE	aucun
étape 3	17	$f(17) \approx 24,3$	VRAIE	aucun
étape 4	18	$f(18) \approx 23,7$	FAUSSE	18

b. La température de la monture est inférieure à 24 °C à partir de $t_0 = 18$ minutes.

c. Pour que l'algorithme permette d'obtenir une valeur approchée de t_0 arrondie au dixième, il suffit de remplacer la ligne « t prend la valeur $t+1$ » par « t prend la valeur $t+0,1$ ».

Exercice 2 **10 points**

A. Probabilités conditionnelles

1. a. Sur $900+600 = 1500$ paires de lentilles, 900 sont rigides donc $P(R) = \dfrac{900}{1500} = 0,6$.

b. $P(S) = 0,4$, $P_R(D) = 0,01$ et $P_S(D) = 0,02$.

2. Calculer $P(R \cap D) = P(R)P_R(D) = 0,6 \times 0,01 = 0,006$.

3. La probabilité que la paire de lentilles soit défectueuse est
$P(D) = P(R \cap D) + P(S \cap D) = 0,006 + 0,4 \times 0,02 = 0,014$.

4. La probabilité que la paire de lentilles soit rigide sachant qu'elle est défectueuse est
$P_D(R) = \dfrac{P(D \cap R)}{P(D)} = \dfrac{0,006}{0,014} \approx 0,429$.

B. Loi binomiale et loi normale

On considère que l'entreprise fabrique un stock important de paires de lentilles de contact.
On admet que 1,4 % des paires de lentilles de ce stock sont défectueuses.
On prélève au hasard n paires de lentilles dans ce stock. Le stock est suffisamment important pour que l'on puisse assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise de n paires de lentilles.
On considère la variable aléatoire X qui, à chaque prélèvement de ce type, associe le nombre de paires de lentilles défectueuses.

1. On répète n fois, indépendamment, une épreuve à deux issues, le succès « la paire de lentilles est défectueuse » de probabilité $p = 0,014$, et l'échec, donc le nombre de succès X suit une loi binomiale de paramètres n et $p = 0,014$.

2. Dans cette question $n = 150$.

a. $P(X = 0) \approx 0,121$, avec la calculatrice.

b. La probabilité qu'au moins une paire de lentilles soit défectueuse est
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,879$.

3. Dans cette question $n = 1\,000$.
On admet que la loi de la variable aléatoire X peut être approchée par la loi normale de moyenne 14 et d'écart type $3,715$.

a. On approche la loi de X par la loi normale
- de même espérance $\mu = np = 1000 \times 0,014 = 14$
- et de même écart type $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \times 0,014 \times 0,986} \approx 3,715$.

b. Avec Y une variable aléatoire de loi normale de moyenne 14 et d'écart type $3,715$, on estime la probabilité d'avoir au plus 10 paires de lentilles défectueuses par $P(Y \leqslant 10,5) \approx 0,173$.

C. Test d'hypothèse

1. La valeur approchée de h arrondie au centième est 0,08.
(On sait que $\overline{Z}$ suit une loi normale, d'espérance $\mu = 15$ et d'écart-type $\sigma\left(\overline{Z}\right) = \dfrac{0,4}{\sqrt{100}} = 0,04$,
donc $P\left(15 - h \leqslant \overline{Z} \leqslant 15 + h\right) = 0,95 \iff h = 1,96 \times 0,04 \approx 0,08$)

2. On prélève un échantillon de 100 lentilles dans la production et on calcule la moyenne $\overline{z}$ des diamètres des lentilles de cet échantillon.
Si $\overline{z} \in [14,92 ; 15,08]$,
alors on accepte l'hypothèse nulle H_0,
sinon on rejette l'hypothèse nulle, avec un risque d'erreur $\alpha = 0,05$.

3. $\overline{z} = 14,94$ mm $\in [14,92 ; 15,08]$
donc on accepte H_0.