∽ Sujet 0 - Mathématiques - Corrigé du sujet 3 ∼
Évaluation en fin de première

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

1. Donner un ordre de grandeur de 101×99 :

a. 100 **b.** 1 000 **c.** 10 000 **d.** 100 000

> $101 \approx 100$ et $99 \approx 100$ donc $101 \times 99 \approx 100 \times 100$ et donc $101 \times 99 \approx 10000$
>
> **Réponse c.**

2. Un prix augmente de 20 % puis diminue de 20 %.
Après ces deux évolutions, on peut affirmer que :

a. Le prix est égal à sa valeur de départ.
b. Le prix est strictement supérieur à sa valeur de départ.
c. Le prix est strictement inférieur à sa valeur de départ.
d. On ne peut pas savoir : cela dépend de la valeur de départ.

> Augmenter de 20 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{20}{100} = 1{,}2$.
> Diminuer de 20 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{20}{100} = 0{,}8$.
> Augmenter puis diminuer de 20 %, c'est multiplier par $1{,}2 \times 0{,}8 = 0{,}96 < 1$.
>
> **Réponse c.**

3. Par combien faut-il multiplier une quantité positive pour que celle-ci diminue de 2,3 % ?

a. 1,23 **b.** 0,977 **c .** 0,77 **d.** 1,023

> Diminuer de 2,3 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{2{,}3}{100} = \dfrac{100}{100} - \dfrac{2{,}3}{100} = \dfrac{97{,}7}{100} = 0{,}977$.
>
> **Réponse b.**

4. Dans un lycée, 50 élèves étudient le Grec, ce qui représente 4 % de du nombre d'élèves inscrits dans ce lycée.
Le nombre d'élèves inscrits dans ce lycée est égal à :

a. 2 **b.** 200 **c.** 125 **d.** 1 250

> Si n est le nombre d'élèves du lycée, on a : $50 = \dfrac{4}{100} \times n$ donc $\dfrac{50 \times 100}{4} = n$ donc $n = 1250$.
>
> **Réponse d.**

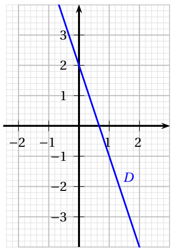
5. Le volume d'un glacier diminue de 3 % chaque année.
Si $V(n)$ désigne le volume du glacier pour l'année n on a :

a. $V(n+1) = V(n) - 0{,}03$ **b.** $V(n+1) = 0{,}03 \times V(n)$
c. $V(n+1) = 0{,}97 \times V(n)$ **d.** $V(n+1) = V(n) - 0{,}97$

> Diminuer de 3 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{3}{100} = 0{,}97$. **Réponse c.**

6.

Dans un repère du plan on a représenté une droite D.



Le coefficient directeur de cette droite est égal à :

a. -3 **b.** -1 **c.** 2 **d.** 3

La droite passe par les points de coordonnées $(0\,;\,2)$ et $(1\,;\,-1)$ donc son coefficient directeur est égal à $\dfrac{-1-2}{1-0} = -3$. **Réponse a.**

7. Dix stylos coûtent en tout 13 euros.

Le prix de trois stylos est égal à :

a. 3,60 euros **b.** 6,90 euros **c.** 3,90 euros **d.** 6,50 euros

On fait un tableau de proportionnalité :

nombre	10	3
prix	13	?

$\dfrac{3\times 13}{10} = 3{,}90$ **Réponse c.**

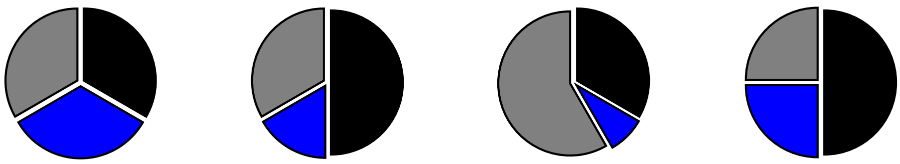
8. Une athlète parcourt 1 km en 5 minutes. Quelle est sa vitesse moyenne ?

a. 8 km/h **b.** 10 km/h **c.** 12 km/h **d.** 14 km/h

Dans une heure, il y a 60 minutes donc 12 fois 5 minutes. L'athlète parcourt 1 km en 5 minutes donc 12 km en 60 minutes. **Réponse c.**

9. Sur 60 personnes présentes à une exposition, on distingue trois groupes :
groupe A : 30 personnes, groupe B : 12 personnes, et groupe C : les autres.
Quelle représentation décrit la situation ?

a. **b.** **c.** **d.**



Le groupe A contient la moitié de l'effectif total donc on peut éliminer les représentations A et c.
Le groupe B contient 12 personnes, et le groupe C le reste soit 18 personnes.
Les effectifs sont différents donc on peut éliminer la représentation d.
Réponse b.

10. On considère les deux séries ci-dessous.

Série A : 9 ; 10 ; 10 ; 11 et Série B : 7 ; 10 ; 10 ; 13

Une seule des quatre propositions suivantes est vraie.

a. La moyenne de la série A est strictement supérieure à la moyenne de la série B.

b. La moyenne de la série B est strictement supérieure à la moyenne de la série A.

c. L'écart–type de la série A est strictement supérieur à l'écart-type de la série B.

d. L'écart–type de la série B est strictement supérieur à l'écart-type de la série A.

Les deux séries ont la même moyenne, 10, mais les nombres sont plus éloignés de 10 dans la série B. **Réponse d.**

11. Le volume V d'un cylindre de hauteur h et de rayon r est égal à $V = \pi r^2 h$.
On cherche à isoler h. On a :

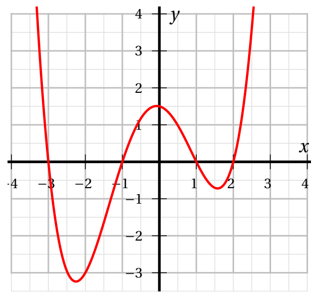
a. $h = \sqrt{\frac{V}{\pi r^2}}$ **b.** $h = \frac{\pi r^2}{V}$ **c.** $h = \frac{V}{\pi r^2}$ **d.** $h = \frac{r^2}{\pi V}$

$V = \pi r^2 h$ donc $\dfrac{V}{\pi r^2} = h$ **Réponse c.**

12.

Soit f une fonction définie sur l'intervalle $[-4 ; 4]$ dont la représentation graphique est donnée ci-contre.
L'ensemble $\mathscr{S}$ des solutions de l'équation $f(x) = 0$ est :

a. $\mathscr{S} = \{0\}$ **b.** $\mathscr{S} = [-3 ; 2]$
c. $\mathscr{S} = \{-3 ; -1 ; 1 ; 2\}$ **d.** $\mathscr{S} = \{1{,}5\}$



Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de la courbe représentant f et de l'axe des abscisses. **Réponse c.**

DEUXIÈME PARTIE (14 points)

Exercice 1 (X points)

Victor sort un plat du four. La température du plat est alors égale à 180 °C. II place ce plat dans une pièce dont la température est égale à 25 °C. Le plat refroidit.

Le plat ne pourra être servi que lorsque sa température sera devenue inférieure ou égale à 40 °C.

On étudie le refroidissement du plat selon deux modèles mathématiques.

Partie A : Premier modèle

On suppose que la baisse de la température du plat est *proportionnelle* à la durée du refroidissement, c'est-à-dire au nombre de minutes écoulées depuis la sortie du four.

On constate que 3 minutes après la sortie du four, la température du plat est égale à 105 °C.

1. $180 - 105 = 75$ donc en 3 minutes, la température du plat a baissé de 75 °C.
   La baisse de la température du plat est proportionnelle à la durée du refroidissement, donc en 1 minute, la température du plat a baissé de $\dfrac{75}{3}$, soit 25 °C.
2. $5 \times 25 = 125$ donc après 5 minutes, la température du plat a baissé de 125 °C.
   $180 - 125 = 55$; après 5 minutes, elle est donc de 55 °C.
3. $8 \times 25 = 200$ donc après 8 minutes, la température du plat aurait baissé de 200 °C, ce qui n'est pas possible puisque la température de départ était de 180 °C.
   Ce premier modèle ne semble pas pertinent.

Partie B : Second modèle

On dispose toujours des données suivantes :

- la température de la pièce est égale à 25 °C.
- la température du plat à la sortie du four est égale à 180 °C.
- la température du plat, 3 minutes après la sortie du four, est égale à 105 °C.

Pour tout entier naturel n on note U_n, la différence entre la température du plat et la température de la pièce, n minutes après la sortie du four.

Exemple : 3 minutes après la sortie du four, l'écart avec la température de la pièce est égal à $105-25=80$. On a donc $U_3=80$.

1. À la sortie du four, pour $n=0$, le plat est à 180 °C et la pièce est à 25 °C.
   $180-25=155$ donc $U_0=155$.
2. On suppose que chaque minute la différence U_n diminue de 20 %.
   a. Diminuer de 20 %, c'est multiplier par $1-\dfrac{20}{100}$, soit 0,8.
   Donc, pour tout entier naturel n, on a $U_{n+1}=0{,}8U_n$.
   b. $U_0=155$ et, pour tout n, on a $U_{n+1}=0{,}8U_n$, donc la suite (U_n) est géométrique de premier terme $U_0=155$ et de raison $q=0{,}8$.
   c. On en déduit que, pour tout n, on a : $U_n=U_0\times q^n=155\times 0{,}8^n$.
   d. On dispose des données suivantes :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
U_n arrondi à 10^{-1}	80	64	51,2	41	32,8	26,2	21	16,8	13,4	10,7	8,6	6,9	5,5

La température du plat doit être inférieure à 40 °C soit 15 °C au dessus de la température de la pièce. Il faut donc trouver la plus petite valeur de n telle que $U_n<15$.
Victor pourra servir le plat au bout de 11 minutes.

Exercice 2 (X points)

Un village propose aux participants de la fête du sport deux épreuves : une randonnée et un cross. Il n'est pas possible de s'inscrire aux deux épreuves à la fois.

On dispose des informations suivantes :

- 90 % des participants ont choisi la randonnée, parmi eux, 5 % sont licenciés dans un club.
- 10 % des participants ont choisi le cross, parmi eux, 40 % sont licenciés dans un club.

Un journaliste interroge un participant au hasard.

On considère les évènements suivants :

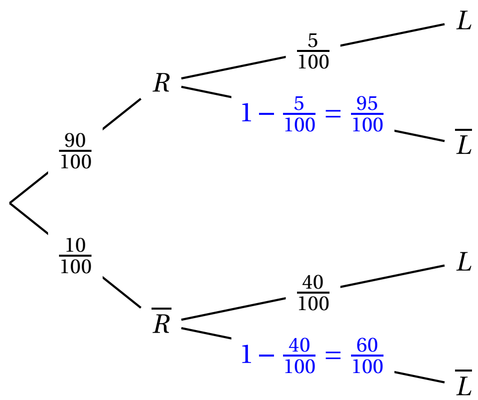
- R : « Le participant a choisi la randonnée »
- L : « Le participant est licencié dans un club ».

1. **a.** Parmi les participants qui ont choisi la randonnée, 5 % sont licenciés dans un club. Donc la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi la randonnée est $\dfrac{5}{100}$.

b. Parmi les participants qui ont choisi le cross, 40 % sont licenciés dans un club. Donc la probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club sachant qu'il a choisi le cross est $\dfrac{40}{100}$.

En prenant connaissance de ces deux probabilités, le journaliste estime que s'il choisit un participant parmi ceux qui sont licenciés dans un club, la probabilité qu'il ait effectué le cross sera largement supérieure à 50%. *L'objectif des questions suivantes est de vérifier si cette intuition est correcte.*

2. On représente la situation par un arbre de probabilité.



3. **a.** La probabilité que le participant interrogé ait choisi le cross et soit licencié dans un club est $p\left(\overline{R}\cap L\right)=\dfrac{10}{100}\times\dfrac{40}{100}=\dfrac{400}{10000}$.

b. La probabilité que le participant interrogé soit licencié dans un club est $p(L)$.
D'après la formule des probabilités totales :

$$p(L)=p\left(R\cap L\right)+p\left(\overline{R}\cap L\right)$$
$$=\frac{90}{100}\times\frac{5}{100}+\frac{400}{10000}=\frac{450}{10000}+\frac{400}{10000}=\frac{850}{10000}\text{, soit } 8{,}5\,\%.$$

4. Le journaliste interroge un participant licencié dans un club.
La probabilité que ce participant ait choisi le cross est :

$$p_L\left(\overline{R}\right)=\frac{p\left(\overline{R}\cap L\right)}{p(L)}=\frac{\frac{400}{10000}}{\frac{850}{10000}}=\frac{400}{850}.$$

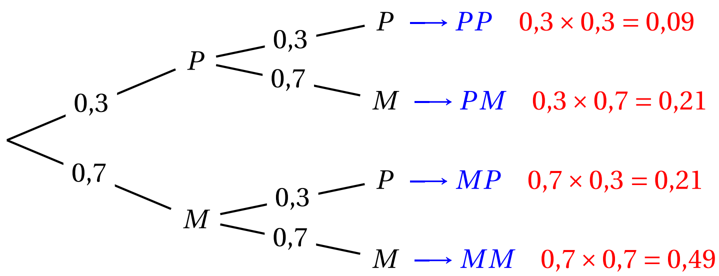
$\dfrac{400}{850}<0{,}5$ donc l'intuition du journaliste n'est pas correcte.

Exercice 3 (X points)

1. Un employé reçoit des appels téléphoniques.
On estime que la probabilité qu'un appel dure plus de cinq minutes est égale à 0,3.
On suppose que les durées des différents appels sont indépendantes.
Ce matin, l'employé reçoit deux appels.

On représente la situation au moyen d'un arbre de probabilité en appelant :

- P l'événement « l'appel a duré plus de 5 minutes » ;
- M l'événement « l'appel n'a pas duré plus de 5 minutes ».



Affirmation 1 :

La probabilité que les deux appels durent tous les deux plus de cinq minutes est égale à 0,09.

> L'événement « les deux appels durent tous les deux plus de cinq minutes » correspond à l'évènement PP dont la probabilité est : $0,3 \times 0,3 = 0,09$.
>
> **Affirmation 1 vraie**

Affirmation 2 :

La probabilité qu'un appel exactement sur les deux dure plus de cinq minutes est égale à 0,21.

> L'événement « un appel exactement sur les deux dure plus de cinq minutes » correspond à la réunion des évènements incompatibles PM et MP.
> La probabilité de chacun de ces événements est $0,3 \times 0,7 = 0,21$, donc la probabilité cherchée est de $0,21 + 0,21 = 0,42$.
>
> **Affirmation 2 fausse**

2. Le gérant d'une piscine s'intéresse à la présence de bactéries dans l'eau. Il effectue un prélèvement. Ce prélèvement montre que la concentration de bactéries est égale à 1 000 bactéries par millilitre. Le seuil maximal autorisé est égal à 1 500 bactéries par millilitre.

On admet que la concentration de bactéries est modélisée par la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par : $f(t) = 1,1^t$, où $f(t)$ désigne la concentration, en milliers de bactéries par millilitre, et t désigne la durée, en heure, écoulée depuis que le prélèvement a été effectué.

Affirmation 3 :

La fonction f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

> La fonction f est une fonction exponentielle de type $t \longmapsto a^t$, avec $a = 1,1$; or $1,1 > 1$ donc la fonction f est strictement croissante.
>
> **Affirmation 3 vraie**

Affirmation 4 :

La concentration de bactéries deux heures après le prélèvement est inférieure au seuil maximal autorisé.

> $f(2) = 1,1^2 = 1,21$; donc la concentration de bactéries deux heures après le prélèvement est de 1 210 bactéries, donc inférieure au seuil maximal autorisé.
>
> **Affirmation 4 vraie**