Sujet 0 – Spécialité mathématiques 1 - Corrigé
Évaluation en fin de première

PREMIÈRE PARTIE : AUTOMATISMES - QCM (6 pts)

Question 1

L'inverse du double de 5 est égal à :

a. $\dfrac{2}{5}$ **b.** $\dfrac{1}{10}$ **c.** $\dfrac{5}{2}$ **d.** 10

> Le double de 5 est 10, l'inverse du double de 5 est donc $\dfrac{1}{10}$. **Réponse b**

Question 2

On considère la relation $F = a + \dfrac{b}{cd}$.

Lorsque $a = \dfrac{1}{2}$, $b = 3$, $c = 4$, $d = -\dfrac{1}{4}$, la valeur de F est égale à :

a. $-\dfrac{5}{2}$ **b.** $-\dfrac{3}{2}$ **c.** $\dfrac{5}{2}$ **d.** $\dfrac{3}{2}$

> $cd = 4 \times \left(-\dfrac{1}{4}\right) = -1$ donc $\dfrac{b}{cd} = \dfrac{3}{-1} = -3$
>
> $F = a + \dfrac{b}{cd} = \dfrac{1}{2} + (-3) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{6}{2} = -\dfrac{5}{2}$ **Réponse a**

Question 3

Le prix d'un article est multiplié par 0,975.

Cela signifie que le prix de cet article a connu :

a. une baisse de 2,5 % **b.** une augmentation de 97,5 %
c. une baisse de 25 % **d.** une augmentation de 0,975 %

> Multiplier par $\left(1 - \dfrac{t}{100}\right)$, c'est faire subir une baisse de t %.
>
> $0{,}975 = 1 - 0{,}025 = 1 - \dfrac{2{,}5}{100}$; il s'agit donc d'une baisse de 2,5 %.
>
> **Réponse a**

Question 4

Le prix d'un article est noté P. Ce prix augmente de 10 % puis baisse de 10 %.

À l'issue de ces deux variations, le nouveau prix est noté P_1. On peut affirmer que :

a. $P_1 = P$ **b.** $P_1 > P$ **c.** $P_1 < P$ **d.** Cela dépend de P

Augmenter de 10 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{10}{100}=1{,}1$.
Baisser de 10 %, c'est multiplier par $1-\dfrac{10}{100}=0{,}9$.
Augmenter de 10 % puis baisser de 10 %, c'est multiplier par $1{,}1\times 0{,}9=0{,}99<1$.
Donc $P_1<P$ (avec $P\neq 0$) **Réponse c**

Question 5

On lance un dé à 4 faces.
La probabilité d'obtenir chacune des faces est donnée dans le tableau ci-dessous :

Face numéro 1	Face numéro 2	Face numéro 3	Face numéro 4
0,5	$\dfrac{1}{6}$	0,2	x

On peut affirmer que :

a. $x=\dfrac{2}{15}$ **b.** $x=\dfrac{2}{3}$ **c.** $x=0{,}4$ **d.** $x=0{,}1$

La somme des probabilités doit être égale à 1, donc $0{,}5+\dfrac{1}{6}+0{,}2+x=1$
donc $0{,}7+\dfrac{1}{6}+x=1$ donc $\dfrac{7}{10}+\dfrac{1}{6}+x=1$ donc $\dfrac{21}{30}+\dfrac{5}{30}+x=1$ donc $\dfrac{26}{30}+x=1$
donc $x=\dfrac{30}{30}-\dfrac{26}{30}$ donc $x=\dfrac{4}{30}$ donc $x=\dfrac{2}{15}$ **Réponse a**

Question 6

On considère x, y, u des réels non nuls tels que $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{u}$.

On peut affirmer que :

a. $u=\dfrac{xy}{x+y}$ **b.** $u=\dfrac{x+y}{xy}$ **c.** $u=xy$ **d.** $u=x+y$

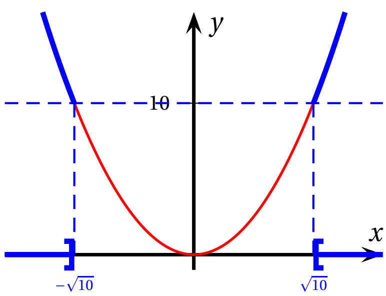
$\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{u}$ équivaut à $\dfrac{x+y}{xy}=\dfrac{1}{u}$ équivaut à $\dfrac{xy}{x+y}=u$ **Réponse a**

Question 7

On a représenté ci-contre la parabole d'équation $y=x^2$.
On note $(\mathscr{I})$ l'inéquation, sur $\mathbb{R}$, $x^2\geqslant 10$.
L'inéquation $(\mathscr{I})$ est équivalente à :

a. $-\sqrt{10}\leqslant x\leqslant\sqrt{10}$ **b.** $x\leqslant-\sqrt{10}$ ou $x\geqslant\sqrt{10}$

c. $x\geqslant\sqrt{10}$ **d.** $x=\sqrt{10}$ ou $x=-\sqrt{10}$

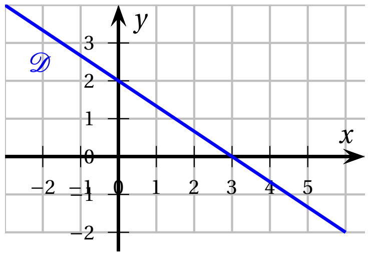


$f(x)\geqslant 10$ signifie que la courbe représentant la fonction f est au dessus de la droite d'équation $y=10$.
Voir graphique **Réponse b**

Question 8

On a représenté ci-contre une droite $\mathscr{D}$ dans un repère orthonormé.

Une équation de la droite $\mathscr{D}$ est :



a. $y = -\dfrac{3}{2}x + 2$ **b.** $y = \dfrac{2}{3}x + 2$

c. $2x - 3y - 6 = 0$ **d.** $\dfrac{x}{3} + \dfrac{y}{2} - 1 = 0$

> Il suffit de chercher quelle droite passe par les points de coordonnées $(0\,;2)$ et $(3\,;0)$.
> **Réponse d**

Question 9

On considère trois fonctions définies sur $\mathbb{R}$:

$$f_1 : x \longmapsto x^2 - (1-x)^2 \qquad f_2 : x \longmapsto \frac{x}{2} - \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \qquad f_3 : x \longmapsto \frac{5 - \frac{2}{3}x}{0{,}7}$$

Parmi ces trois fonctions, celles qui sont des fonctions affines sont :

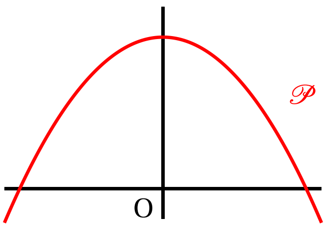
a. aucune **b.** toutes

c. uniquement la fonction f_1 **d.** uniquement les fonction f_2 et f_3

> On cherche si les fonctions sont de la forme $x \longmapsto ax + b$.
> - $f_1(x) = x^2 - (1-x)^2 = x^2 - \left(1 - 2x + x^2\right) = x^2 - 1 + 2x - x^2 = 2x - 1$.
>   Donc f_1 est une fonction affine.
> - $f_2(x) = \dfrac{x}{2} - \left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ est de la forme $ax + b$ avec $a = \dfrac{1}{2}$ et $b = -\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$.
>   Donc f_2 est une fonction affine.
> - $f_3(x) = \dfrac{5 - \frac{2}{3}x}{0{,}7} = -\dfrac{2}{3 \times 0{,}7}x + \dfrac{5}{0{,}7}$ est de la forme $ax+b$ avec $a = -\dfrac{2}{2{,}1}$ et $b = \dfrac{5}{0{,}7}$.
>   Donc f_3 est une fonction affine.
>
> **Réponse b**

Question 10

On a représenté ci-contre une parabole $\mathscr{P}$.
Une seule des quatre fonctions ci-dessous est susceptible d'être représentée par la parabole $\mathscr{P}$.
Laquelle ?



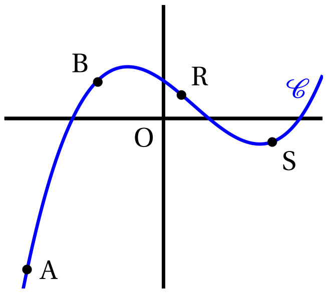
a. $x \longmapsto x^2 - 10$ **b.** $x \longmapsto -x^2 - 10$

c. $x \longmapsto -x^2 + 10$ **d.** $x \longmapsto -x^2 + 10x$

> Le point de la courbe d'abscisse 0 a une ordonnée strictement positive. **Réponse c**

Question 11

On a représenté ci-contre la courbe $\mathscr{C}$ d'une fonction f.
Les points A, B, R et S appartiennent à la courbe $\mathscr{C}$.
Leurs abscisses sont notées respectivement x_A, x_B, x_R et x_S.
L'inéquation $x \times f(x) > 0$ est vérifiée par :



a. x_A et x_B **b.** x_A et x_R
c. x_A et x_S **d.** x_A, x_B et x_S

> On calcule $x \times f(x)$ pour les 4 points.
> - $x_A < 0$ et $f(x_A) < 0$ donc $x_A \times f(x_A) > 0$, donc x_A est solution.
> - $x_B < 0$ et $f(x_B) > 0$ donc $x_B \times f(x_B) < 0$, donc x_B n'est pas solution.
> - $x_R > 0$ et $f(x_R) > 0$ donc $x_R \times f(x_R) > 0$, donc x_R est solution.
> - $x_S > 0$ et $f(x_S) < 0$ donc $x_S \times f(x_S) < 0$, donc x_S n'est pas solution.
>
> **Réponse b**

Question 12

Voici une série de notes avec les coefficients associés.

Note	10	8	16
Coefficient	1	2	x

On note m la moyenne de cette série. Que doit valoir x pour que $m = 15$?

a. impossible **b.** $x = 10^{-3}$ **c.** $x = 3$ **d.** $x = 19$

> Il y a en tout $(x+3)$ notes, et si leur moyenne est de 15, la somme des notes doit être égale à $15 \times (x+3)$ soit $15x + 45$.
> Or la somme des notes est égale à $10 \times 1 + 8 \times 2 + 16 \times x = 16x + 26$.
> $16x + 26 = 15x + 45$ équivaut à $16x - 15x = 45 - 26$ soit $x = 19$. **Réponse d**

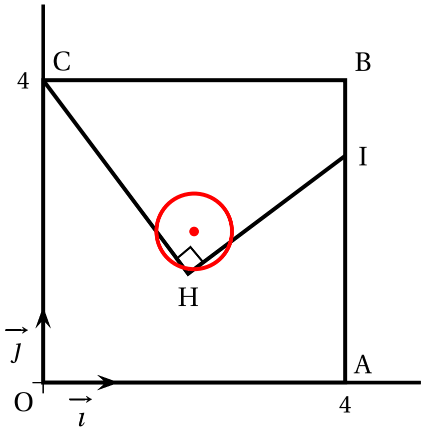
DEUXIÈME PARTIE (14 points)

Exercice 1 (X points)

On considère la figure suivante, représentée dans un repère orthonormé $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On dispose des données suivantes :

- Le quadrilatère OABC est un carré de côté 4 ;
- On a A(4 ; 0), B(4 ; 4), C(0 ; 4), I(4 ; 3) ;
- Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI) ;
- On note $\mathscr{E}$ le cercle de centre D(2 ; 2) et de rayon 0,5.



1. **a.** On a I$\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{OI}}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$, et C$\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{OC}}\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$

b. On en déduit que $\overrightarrow{\text{OI}}\cdot\overrightarrow{\text{OC}} = 4\times 0+3\times 4 = 12$.

2. **a.** D'après le texte, le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI), donc $\overrightarrow{\text{OC}}\cdot\overrightarrow{\text{OI}} = \overrightarrow{\text{OH}}\cdot\overrightarrow{\text{OI}}$. Les vecteurs $\overrightarrow{\text{OH}}$ et $\overrightarrow{\text{OI}}$ sont colinéaires et de même sens donc $\overrightarrow{\text{OH}}\cdot\overrightarrow{\text{OI}} = \text{OH}\times\text{OI}$.

De plus, $\overrightarrow{\text{OI}}\cdot\overrightarrow{\text{OC}} = \overrightarrow{\text{OC}}\cdot\overrightarrow{\text{OI}}$.

On peut donc conclure que $\overrightarrow{\text{OI}}\cdot\overrightarrow{\text{OC}} = \text{OH}\times\text{OI}$.

b. $\overrightarrow{\text{OI}}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ donc $\text{OI} = \sqrt{4^2+3^2} = \sqrt{25} = 5$

c. On a : $\overrightarrow{\text{OI}}\cdot\overrightarrow{\text{OC}} = \text{OH}\times\text{OI}$

$\overrightarrow{\text{OI}}\cdot\overrightarrow{\text{OC}} = 12$

$\text{OI} = 5$

On en déduit que $\text{OH}\times 5 = 12$ donc que $\text{OH} = \dfrac{12}{5} = 2{,}4$.

3. **a.** Le point H est le projeté orthogonal du point C sur la droite (OI), donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{OI}}$ et $\overrightarrow{\text{CH}}$ sont orthogonaux, donc le vecteur $\overrightarrow{\text{OI}}$ est un vecteur normal à la droite (CH).

Or $\overrightarrow{\text{OI}}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ donc la droite (CH) a une équation cartésienne de la forme $4x+3y+c=0$, où c est un réel à déterminer.

La droite (CH) contient le point C de coordonnées $\begin{pmatrix}0\\4\end{pmatrix}$, et le point C appartient à la droite (CH) ; donc : $4\times 0+3\times 4+c = 0$ donc $c=-12$.

La droite (CH) a pour équation $4x+3y-12=0$.

b. Le cercle $\mathscr{E}$ de centre D $(2\,,2)$ et de rayon 0,5 a pour équation :

$(x-2)^2+(y-2)^2 = 0{,}5^2$ soit $x^2-4x+4+y^2-4y+4-0{,}25=0$

c'est-à-dire $x^2+y^2-4x-4y+7{,}75=0$

c. Soit M le point de coordonnées (1,5 ; 2).

- $$\begin{aligned} x_{\text{M}}^2+y_{\text{M}}^2-4x_{\text{M}}-4y_{\text{M}}+7{,}75 &= 1{,}5^2+2^2-4\times 1{,}5-4\times 2+7{,}75\\ &= 2{,}25+4-6-8+7{,}75\\ &= 0\end{aligned}$$

Donc $\text{M}\in\mathscr{E}$.

- $4x_{\text{M}} + 3y_{\text{M}} - 12 = 4 \times 1,5 + 3 \times 2 - 12$
  $= 6 + 6 - 12$
  $= 0$

  Donc $\text{M} \in (\text{CH})$.

On peut donc dire que le point M(1,5 ; 2) appartient à l'intersection du cercle $\mathscr{E}$ et de la droite (CH)

Exercice 2 (X points)

On se place dans un repère $\left(\text{O}\,;\,\overrightarrow{\imath},\,\overrightarrow{\jmath}\right)$ orthogonal.

1. On considère la fonction g définie pour tout réel x par $g(x) = x^2 - 5x + 4$.
On note $\mathscr{P}$ la courbe représentative de la fonction g.

a. $x^2 - 5x + 4$ est un polynôme du second degré.

$\Delta = (-5)^2 - 4 \times 4 = 25 - 16 = 9 = 3^2$

Le polynôme admet donc deux racines :

$x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5-3}{2} = 1$ et $x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{5+3}{2} = 4$

On en déduit que $g(x) = (x-1)(x-4)$. On détermine alors le signe de g.

x	$-\infty$		1		4		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de g		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. On considère un entier naturel n quelconque.

On note A_n le point de la courbe $\mathscr{P}$ d'abscisse n.

On note a_n le coefficient directeur de la droite $(\text{A}_n\text{A}_{n+1})$ donc $a_n = \dfrac{y_{\text{A}_{n+1}} - y_{\text{A}_n}}{x_{\text{A}_{n+1}} - x_{\text{A}_n}}$.

Par définition, $x_{\text{A}_n} = n$, et comme le point A_n est un point de la courbe $\mathscr{P}$, on a : $y_{\text{A}_n} = g\left(x_{\text{A}_n}\right) = g(n) = n^2 - 5n + 4$.

De même : $y_{\text{A}_{n+1}} = g\left(x_{\text{A}_{n+1}}\right) = g(n+1) = (n+1)^2 - 5(n+1) + 4$
$= n^2 + 2n + 1 - 5n - 5 + 4 = n^2 - 3n$

Donc : $y_{\text{A}_{n+1}} - y_{\text{A}_n} = \left(n^2 - 3n\right) - \left(n^2 - 5n + 4\right) = n^2 - 3n - n^2 + 5n - 4 = 2n - 4$.

Or $x_{\text{A}_{n+1}} - x_{\text{A}_n} = n + 1 - n = 1$; donc $a_n = \dfrac{y_{\text{A}_{n+1}} - y_{\text{A}_n}}{x_{\text{A}_{n+1}} - x_{\text{A}_n}} = \dfrac{2n-4}{1} = 2n - 4$.

c. $a_{n+1} - a_n = (2(n+1) - 4) - (2n - 4) = 2n + 2 - 4 - 2n + 4 = 2$

Donc la suite (a_n) est arithmétique de raison 2.

2. Soit f la fonction définie pour tout réel x de $[0,5\,;\,8]$ par $f(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x}$.

On note $\mathscr{C}$ la courbe représentative de la fonction f.

a. $f(x) = x - 5 + \dfrac{4}{x} = \dfrac{x^2}{x} - \dfrac{5x}{x} + \dfrac{4}{x} = \dfrac{x^2 - 5x + 4}{x} = \dfrac{g(x)}{x}$

b. La position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses dépend du signe de $f(x)$: si $f(x) > 0$, alors la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses, et si $f(x) < 0$, alors la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de l'axe des abscisses.

$f(x) = \dfrac{g(x)}{x}$, et sur $[0,5\,;8]$, $x > 0$; donc $f(x)$ est du même signe que $g(x)$ sur $[0,5\,;8]$.

D'après le résultat de la question **1.a.** :

- sur l'intervalle $[0,5\,;1[$, $g(x) > 0$ donc $f(x) > 0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses;
- sur l'intervalle $]1\,;4[$, $g(x) < 0$ donc $f(x) < 0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est en dessous de l'axe des abscisses;
- sur l'intervalle $]4\,;8]$, $g(x) > 0$ donc $f(x) > 0$, donc la courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses.

c. On admet que la fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0,5;\,8]$.

Sur l'intervalle $[0,5;\,8]$, $f'(x) = 1-0+4\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) = 1-\dfrac{4}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{x^2} = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$.

d. On détermine le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[0,5;\,8]$.

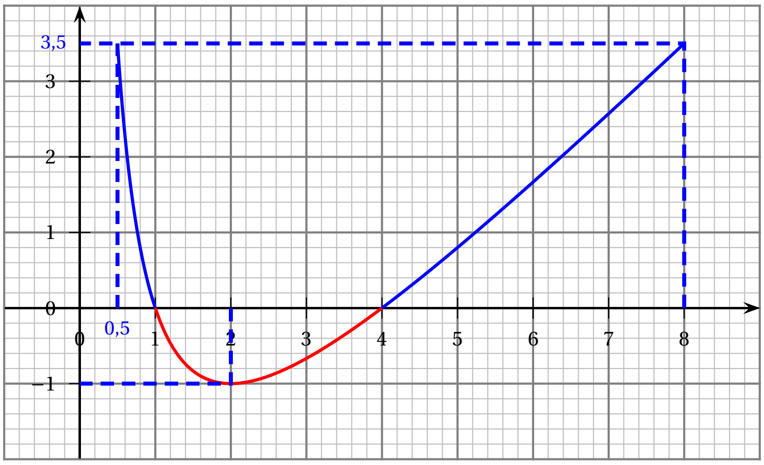
x	0,5		2		8
$x-2$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$-$	0	$+$	
x^2		$+$		$+$	
$f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$		$-$	0	$+$	

On peut calculer les valeurs intéressantes de $f(x)$ pour compléter le tableau de variations.

$f(0,5) = 0,5-5+\dfrac{4}{0,5} = 0,5-5+8 = 3,5$; $f(2) = 2-5+\dfrac{4}{2} = 2-5+2 = -1$, et $f(8) = 8-5+\dfrac{4}{8} = 8-5+0,5 = 3,5$

x	0,5		2		8
$f'(x) = \dfrac{(x-2)(x+2)}{x^2}$		$-$	0	$+$	
variations de f	3,5	$\searrow$	-1	$\nearrow$	3,5

e. On réaliser un schéma de l'allure de la courbe $\mathscr{C}$ sur lequel on fait apparaitre les résultats des questions **2.b** et **2.d**.


3,5
3
2
1
0
−1
0,5
0
1
2
3
4
5
6
7
8