# Corrigé de l'entrée à Sciences Po - 24 février 2018

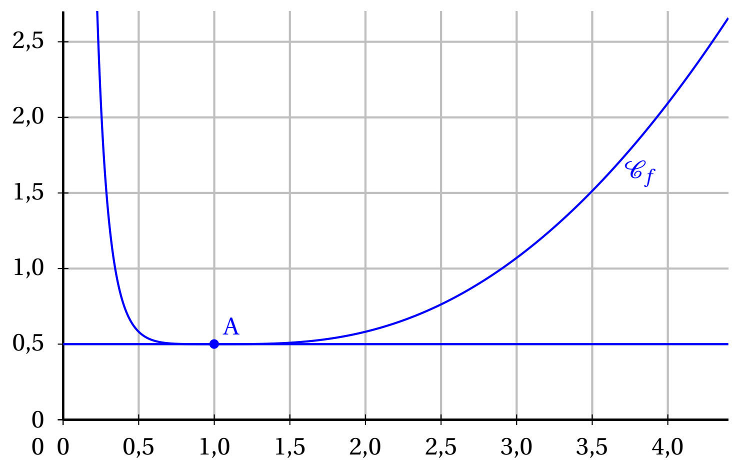
## Problème

### Partie A

La fonction $f$ est définie sur $]0~;~+\infty[$ par : $f(x) = ax^2 + \dfrac{b}{x^2} - \left(\ln(x)\right)^2$, où $a$ et $b$ désignent deux réels.

1. Pour tout $x$ strictement positif :
$f'(x) = a \times (2x) + b \times \left(-\dfrac{2x}{x^4}\right) - 2 \times \dfrac{1}{x} \times \ln(x) = 2ax - \dfrac{2b}{x^3} - 2\dfrac{\ln(x)}{x}$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de $f$ dans un repère orthonormé :




La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A $(1~;~0{,}5)$ et admet une tangente horizontale en ce point.

2. La courbe $\mathcal{C}_f$ passe par le point A $(1~;~0{,}5)$ donc $f(1) = 0{,}5$ donc $a \times 1^2 + \dfrac{b}{1^2} - \left(\ln(1)\right)^2 = 0{,}5$ ce qui équivaut à $a + b = 0{,}5$.
La courbe $\mathcal{C}_f$ admet une tangente horizontale au point A $(1~;~0{,}5)$, donc $f'(1) = 0$ ce qui équivaut à $2a \times 1 - \dfrac{2b}{1^3} - 2\dfrac{\ln(1)}{1} = 0$ ou encore à $2a - 2b = 0$ soit $a = b$.
$a + b = 0{,}5$ et $a = b$ entraîne que $a = b = 0{,}25$.

### Partie B

1. $2X^2 - 4X + 2 = 2\left(X^2 - 2X + 1\right) = 2(X-1)^2$
On en déduit que $2x^4 - 4x^2 + 2 = 2\left(x^2 - 1\right)^2 = 2(x-1)^2(x+1)^2$.
2. Un carré est positif ou nul donc l'expression $2x^4 - 4x^2 + 2$ égale à $2(x-1)^2(x+1)^2$ est strictement positive sauf pour $x = -1$ et $x = 1$ où elle s'annule.

**Partie C**

On considère la fonction $g$ définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = x^2 - \dfrac{1}{x^2} - 4\ln x$.

1. Pour tout $x > 0$, $g'(x) = 2x + \dfrac{2x}{x^4} - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2x^4 - 4x^2 + 2}{x^3}$
   D'après la partie **B**, $g'(x) > 0$ sur $]0\,;\,+\infty[$, sauf pour $x = 1$ où $g'(x) = 0$.
   On peut donc dire que la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$.
2. $g(1) = 1^2 - \dfrac{1}{1^2} - 4\ln(1) = 0$
   Comme la fonction $g$ est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$, on en déduit que :
   - $g(x) < 0$ sur $]0\,;\,1[$ ;
   - $g(1) = 0$ ;
   - $g(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$.

**Partie D**

Dans la suite du problème, $f$ désigne la fonction définie sur $]0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4x^2} - \left(\ln(x)\right)^2$.
On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction $f$.

1. Pour tout réel $x > 0$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{x}\right)^2 - \dfrac{1}{4\left(\dfrac{1}{x}\right)^2} - \left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2 = \dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{1}{4}x^2 - \left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2$.

   Or $\ln\left(\dfrac{1}{x}\right) = -\ln(x)$ donc $\left(\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)^2 = \left(-\ln(x)\right)^2 = \left(\ln(x)\right)^2$.

   On en déduit que, pour tout $x > 0$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right) = \dfrac{1}{4x^2} + \dfrac{1}{4}x^2 - \left(\ln(x)\right)^2 = f(x)$.
2. **a.** Déterminons la limite de $f$ en $+\infty$.

   $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4x^2} - \left(\ln(x)\right)^2 = x^2\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4x^4} - \dfrac{\left(\ln(x)\right)^2}{x^2}\right) = x^2\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4x^4} - \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2\right)$

   Or $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{1}{4x^2} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{4x^4} - \left(\dfrac{\ln(x)}{x}\right)^2\right) = \dfrac{1}{4}$

   et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

   **b.** Déterminons la limite de $f$ en zéro.

   $f(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + \dfrac{1}{4x^2} - \left(\ln(x)\right)^2 = \dfrac{x^4 + 1 - 4x^2\left(\ln(x)\right)^2}{4x^2} = \dfrac{x^4 + 1 - 4\left(x\ln(x)\right)^2}{4x^2}$

   Or $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x\ln(x)\right) = 0$, donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}}\left(x^4 + 1 - 4\left(x\ln(x)\right)^2\right) = 1$ et donc

   $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} \dfrac{x^4 + 1 - 4\left(x\ln(x)\right)^2}{4x^2} = +\infty$ ce qui veut dire que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = +\infty$.
3. Pour tout réel $x > 0$, $f'(x) = \dfrac{x}{2} - \dfrac{1}{2x^3} - 2\dfrac{\ln(x)}{x} = \dfrac{1}{2x}\left(x^2 - \dfrac{1}{x^2} - 4\ln(x)\right) = \dfrac{1}{2x}g(x)$.
   Sur $]0\,;\,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
   On en déduit le sens de variation de la fonction $f$ sur $]0\,;\,+\infty[$ :
   - sur $]0\,;\,1[$, $g(x) < 0$ donc $f$ est strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$ ;
   - sur $]1\,;\,+\infty[$, $g(x) > 0$ donc $f$ est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$.

**Partie E**

1. Soit $h$ la fonction définie sur $]0\,;\,1]$ par $h(x) = f(x) - x$.
   Chercher une solution à l'équation $f(x) = x$ revient à chercher une solution de l'équation $h(x) = 0$.
   $h'(x) = f'(x) - 1$ ; sur $]0\,;\,1]$, $f'(x) < 0$ donc $f'(x) - 1 < 0$ donc la fonction $h$ est strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$.
   $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} h(x) = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} f(x) = +\infty$ et $h(1) = f(1) - 1 = 0{,}5 - 1 = -0{,}5$
   La fonction $h$ est dérivable donc continue, strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$ et elle passe d'une valeur positive à une valeur négative. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 0$ admet une solution unique sur $]0\,;\,1[$. On l'appelle $\alpha$.
2. Soit $k$ la fonction définie sur $[1\,;\,+\infty[$ par $k(x) = f(x) - \dfrac{1}{x}$.
   Chercher une solution à l'équation $f(x) = \dfrac{1}{x}$ revient à chercher une solution de l'équation $k(x) = 0$.
   $k'(x) = f'(x) + \dfrac{1}{x^2}$ ; sur $]1\,;\,+\infty[$, $f'(x) > 0$ donc $f'(x) + \dfrac{1}{x^2} > 0$ donc la fonction $k$ est strictement croissante sur $]1\,;\,+\infty[$.
   $k(1) = f(1) - \dfrac{1}{1} = -0{,}5$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} k(x) = \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.
   La fonction $k$ est dérivable donc continue, strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$ et elle passe d'une valeur négative à une valeur positive. D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $k(x) = 0$ admet une solution unique sur $]1\,;\,+\infty[$. On l'appelle $\beta$.
3. Pour tout $x > 0$, $f(x) = f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ donc $f(\beta) = f\left(\dfrac{1}{\beta}\right)$.
   Comme $f(\beta) = \dfrac{1}{\beta}$, on en déduit que $f\left(\dfrac{1}{\beta}\right) = \dfrac{1}{\beta}$.
   De plus $\beta \in\, ]1\,;\,+\infty[$, donc $\dfrac{1}{\beta} \in\, ]0\,;\,1[$.
   Donc le nombre $\dfrac{1}{\beta}$ appartient à $]0\,;\,1[$ et vérifie $f\left(\dfrac{1}{\beta}\right) = \dfrac{1}{\beta}$, donc $\dfrac{1}{\beta}$ est solution de l'équation $f(x) = x$ sur l'intervalle $]0\,;\,1[$.
   On a vu qu'il n'y avait qu'une solution $\alpha$ sur cet intervalle, donc $\dfrac{1}{\beta} = \alpha$ ce qui veut dire que $\alpha \times \beta = 1$.
4. **a.** On écrit un algorithme permettant d'afficher un encadrement de $\alpha$ à $10^{-2}$ près :

| | |
|---|---|
| **Variables** | $b$ : nombre réel |
| **Initialisation** | $b$ prend la valeur 0,01 |
| **Traitement** | Tant que $f(b) - b > 0{,}01$<br>    $b$ prend la valeur $b + 0{,}01$<br>Fin de Tant que |
| **Sortie** | Afficher $b - 0{,}01$ et $b$ |

   **b.** On détermine un encadrement de $\alpha$ d'amplitude $10^{-2}$.
   $\left.\begin{array}{l} f(0{,}5) - 0{,}5 \approx 0{,}08 > 0 \\ f(0{,}6) - 0{,}6 \approx -0{,}08 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [0{,}5\,;\,0{,}6]$
   $\left.\begin{array}{l} f(0{,}54) - 0{,}54 \approx 0{,}01 > 0 \\ f(0{,}55) - 0{,}55 \approx -0{,}005 < 0 \end{array}\right\}$ donc $\alpha \in [0{,}54\,;\,0{,}55]$

# Exercice : Vrai ou Faux

1. Un capital est placé au taux annuel de 3 % pendant 20 ans, à intérêts composés.
**Affirmation :** la somme disponible au bout de 20 ans est supérieure ou égale au double du capital placé.

> Placer un capital au taux de 3 %, c'est multiplier par 1,03.
> Placer un capital au taux de 3 % sur 20 ans, c'est multiplier par $1{,}03^{20} \approx 1{,}8$.
> Or $1{,}8 < 2$ donc on ne double pas le capital en 20 ans.
> **Affirmation fausse**

2. Une urne contient trois boules indiscernables au toucher portant les numéros 1, 2 et 3.
On tire successivement trois fois une boule avec remise.
On note $N$ la variable aléatoire donnant le nombre de numéros différents obtenus.
**Affirmation :** L'espérance de $N$ est strictement supérieure à $\dfrac{3}{2}$.

> Il y a $3^3 = 27$ résultats possibles à cette expérience, et tous ces résultats sont équiprobables donc chaque résultat a pour probabilité $\dfrac{1}{27}$ :
> (1,1,1), (1,1,2), (1,1,3), (1,2,1), (1,2,2), (1,2,3), (1,3,1), (1,3,2), (1,3,3),
> (2,1,1), (2,1,2), (2,1,3), (2,2,1), (2,2,2), (2,2,3), (2,3,1), (2,3,2), (2,3,3),
> (3,1,1), (3,1,2), (3,1,3), (3,2,1), (3,2,2), (3,2,3), (3,3,1), (3,3,2), (3,3,3),
> Sur les 27 résultats, il y en a 3 qui contiennent le même numéro, 6 qui contiennent les trois numéros et 18 qui en contiennent deux.
> On peut donc établir la loi de probabilité de la variable aléatoire $N$ :
>
> | $n_i$ | 1 | 2 | 3 |
> |---|---|---|---|
> | $p_i = P(N = n_i)$ | $\dfrac{3}{27}$ | $\dfrac{18}{27}$ | $\dfrac{6}{27}$ |
>
> L'espérance de $N$ est $E(N) = \sum \left(n_i \times p_i\right) = 1 \times \dfrac{3}{27} + 2 \times \dfrac{18}{27} + 3 \times \dfrac{6}{27} = \dfrac{57}{27}$.
> Or $\dfrac{57}{27} \approx 2{,}11 > \dfrac{3}{2}$.
> **Affirmation vraie**

3. Une entreprise produit en grande série des véhicules électriques.
On admet que la probabilité qu'un véhicule ne soit pas conforme vaut 0,03.
On prélève au hasard un lot de 100 véhicules en vue de les proposer à la location dans une grande agglomération (on admet que la population est suffisamment importante pour assimiler la constitution de ce lot à 100 tirages successifs avec remise).
**Affirmation :** la probabilité qu'aucun véhicule de ce lot ne soit défectueux est égal à $1 - 0{,}03^{100}$.

> La variable aléatoire $X$ qui donne le nombre de véhicules défectueux suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}03$.
> La probabilité qu'aucun véhicule soit défectueux est
> $P(X = 0) = \dbinom{100}{0} \times 0{,}03^0 \times (1 - 0{,}03)^{100} = 0{,}97^{100} \neq 1 - 0{,}03^{100}$.
> **Affirmation fausse**

**4.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites réelles définies par $u_n = 2+\left(2+2^2+\ldots+2^n\right) = 2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 2^k$ et $v_n = u_n - 1$.
**Affirmation :** une seule des deux suites est géométrique.

- $u_1 = 2+2 = 4$, $u_2 = 2+\left(2+2^2\right) = 8$ et $u_3 = 2+\left(2+2^2+2^3\right) = 16$
  On peut conjecturer que la suite $(u_n)$ est géométrique de raison 2.
- $v_1 = u_1 - 1 = 3$, $v_2 = u_2 - 1 = 7$ et $v_3 = u_3 - 1 = 15$
  $\dfrac{v_2}{v_1} = \dfrac{7}{3}$ et $\dfrac{v_3}{v_2} = \dfrac{15}{7}$ et $\dfrac{15}{7} \neq \dfrac{15}{7}$ donc la suite $(v_n)$ n'est pas géométrique.
- La suite $\left(2^n\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique de raison 2 et de premier terme 2. La somme de ses $n$ premiers termes est $2+2^2+\cdots+2^n = 2\times\dfrac{1-2^n}{1-2} = 2\left(2^n-1\right) = 2^{n+1}-2$.
  On en déduit que $2+\left(2+2^2+\cdots+2^n\right) = 2+2^{n+1}-2 = 2^{n+1}$.
  Pour tout $n$ de $\mathbb{N}^*$, $u_n = 2^{n+1}$ donc la suite $(u_n)$ est géométrique de raison 2.

**Affirmation vraie**

**5.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle telle qu'il existe un réel $\ell$ tel que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = \ell$.
**Affirmation :** $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$

$\displaystyle\lim_{n\to+\infty} nu_n = \ell$ veut dire que pour tout réel $\varepsilon > 0$, on peut trouver un entier $n_\varepsilon$ tel que pour $n > n_\varepsilon$, on ait $\left|nu_n - \ell\right| < \varepsilon$.
Donc pour $n > n_\varepsilon$, on a $\ell-\varepsilon < nu_n < \ell+\varepsilon$ ce qui équivaut à $\dfrac{\ell-\varepsilon}{n} < u_n < \dfrac{\ell+\varepsilon}{n}$.
Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ell-\varepsilon}{n} = \lim_{n\to+\infty} \dfrac{\ell+\varepsilon}{n} = 0$
On en déduit, d'après le théorème des gendarmes, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

**Affirmation vraie**

**6.** La suite $u_n$ est définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$.
**Affirmation :** pour tout entier naturel $n$, $u_n = n+1$.

Pour $n = 0$, $u_n = u_0 = 1$ et $0+1 = 1$.
Pour $n = 0$, $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$ devient $u_1 = 10u_0 - 9\times 0 - 8 = 10 - 8 = 2$ ;
donc $u_1 = 2 = 1+1$.
Pour $n = 1$, $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8$ devient $u_2 = 10u_1 - 9\times 1 - 8 = 10\times 2 - 9 - 8 = 3$ ;
donc $u_2 = 3 = 2+1$.
On peut conjecturer que, pour tout $n$, on a $u_n = n+1$.
On démontre cette propriété par récurrence.

- On a vu que $u_0 = 1 = 0+1$ donc la propriété est vraie au rang 0.
- On suppose la propriété vraie au rang $n \geqslant 0$, donc $u_n = n+1$.
  $u_{n+1} = 10u_n - 9n - 8 = 10(n+1) - 9n - 8 = 10n + 10 - 9n - 8 = n+2 = (n+1)+1$.
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$ ; d'après le principe de récurrence, elle est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que, pour tout $n$, on a $u_n = n+1$.

**Affirmation vraie**

**7.** Soient $f$ et $g$ deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ telles que

- $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$
- Pour tout réel $x$, $f(x) > g(x)$

**Affirmation :** $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = +\infty$

> Prenons par exemple $f(x) = x + 1$ et $g(x) = x$.
> On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$ et pour tout réel $x$, $f(x) > g(x)$, mais $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x) - g(x)\right) = 1$.
> **Affirmation fausse**

**8.** Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}$.

**Affirmation :** pour tout réel $x$, $f(2x) = \dfrac{2f(x)}{1 + \left(f(x)\right)^2}$.

$$\frac{2f(x)}{1+\left(f(x)\right)^2} = \frac{2\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1+\left(\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}\right)^2} = \frac{2\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{1+\dfrac{e^{4x}-2e^{2x}+1}{e^{4x}+2e^{2x}+1}} = \frac{2\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{\dfrac{e^{4x}+2e^{2x}+1+e^{4x}-2e^{2x}+1}{e^{4x}+2e^{2x}+1}}$$

$$= \frac{2\dfrac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}}{\dfrac{2e^{4x}+2}{\left(e^{2x}+1\right)^2}} = 2\frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1} \times \frac{\left(e^{2x}+1\right)^2}{2\left(e^{4x}+1\right)} = \frac{\left(e^{2x}-1\right)\left(e^{2x}+1\right)}{e^{4x}+1} = \frac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$$

$$= \frac{e^{2(2x)}-1}{e^{2(2x)}+1} = f(2x)$$

**Affirmation vraie**

**9.** On donne $\sin\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$.

**Affirmation :** $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

On sait que pour tout réel $x$, on a $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

Donc $\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = 1 - \sin^2\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = 1 - \left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = 1 - \dfrac{2+2\sqrt{12}+6}{16} = 1 - \dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}$

$= \dfrac{16-8-2\sqrt{12}}{16} = \dfrac{8-2\sqrt{12}}{16}$

Or $\left(\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2 = \dfrac{8+2\sqrt{12}}{16}$ donc $\dfrac{8-2\sqrt{12}}{16} = \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2$.

Donc $\cos^2\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \left(\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}\right)^2$ et donc $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ou $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = -\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

Or $\dfrac{\pi}{2} < \dfrac{7\pi}{12} < \dfrac{3\pi}{2}$ donc $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) < 0$ ; on en déduit que $\cos\left(\dfrac{7\pi}{12}\right) = \dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

**Affirmation vraie**

**10.** Dans un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$, on note $\mathscr{P}$ la parabole d'équation $y = x^2$.

Soit $a$ un réel strictement positif et A le point de la parabole d'abscisse $a$.

On note B le second point d'intersection entre la parabole et la perpendiculaire à la droite (OA) passant par O.

**Affirmation :** quelle que soit la valeur de $a > 0$, K$(0~;~1)$ appartient à la droite (AB).

> Le point A de la parabole $\mathscr{P}$ a pour abscisse $a$ donc pour ordonnée $a^2$.
> La droite (OA) passe par O donc a une équation de la forme $y = mx$; elle passe par A donc $a^2 = m \times a$ ce qui entraîne $m = a$. La droite (OA) a donc pour équation $y = ax$.
>
> Le coefficient directeur de la droite (OA) est $a$ donc le coefficient directeur $a'$ de toute droite perpendiculaire à (OA) vérifie $aa' = -1$; donc $a' = -\dfrac{1}{a}$.
>
> La droite $d$ perpendiculaire à (OA) passant par O a donc pour équation $y = -\dfrac{1}{a}x$.
>
> Le point B appartient à la droite $d$ et à la parabole $\mathscr{P}$ donc ses coordonnées vérifient le système $\left\{\begin{array}{l} y = x^2 \\ y = -\dfrac{1}{a}x \end{array}\right.$
>
> L'abscisse de B vérifie donc $x^2 = -\dfrac{1}{a}x$ et comme elle est différente de 0, le point B a pour abscisse $-\dfrac{1}{a}$; son ordonnée est $\left(-\dfrac{1}{a}\right)^2 = \dfrac{1}{a^2}$. Donc B a pour coordonnées $\left(-\dfrac{1}{a}~;~\dfrac{1}{a^2}\right)$.
>
> On cherche une équation de la droite (AB). Cette droite n'est pas verticale, donc elle a une équation réduite de la forme $y = mx + p$.
> Elle passe par A$\left(a~;~a^2\right)$ donc $a^2 = ma + p$.
> Elle passe par B$\left(-\dfrac{1}{a}~;~\dfrac{1}{a^2}\right)$ donc $\dfrac{1}{a^2} = -\dfrac{1}{a}m + p$.
> Par soustraction membre à membre, on obtient :
> $a^2 - \dfrac{1}{a^2} = \left(a + \dfrac{1}{a}\right)m \iff \left(a - \dfrac{1}{a}\right)\left(a + \dfrac{1}{a}\right) = \left(a + \dfrac{1}{a}\right)m \iff a - \dfrac{1}{a} = m$
> en divisant les deux membres par $a + \dfrac{1}{a}$ qui est non nul car $a > 0$.
>
> De $a^2 = am + p$ et $m = a + \dfrac{1}{a}$ on déduit : $a^2 = a\left(a - \dfrac{1}{a}\right) + p \iff a^2 = a^2 - 1 + p \iff p = 1$.
> L'ordonnée à l'origine de la droite (AB) est égale à 1 donc cette droite passe par le point K de coordonnées $(0~;~1)$.
>
> **Affirmation vraie**