Sciences Po - Corrigé - Samedi 23 février 2019

EXERCICE VRAI ou FAUX

Question 1.

Les prix réglementés du gaz évoluent mensuellement. En mai 2018, ils ont augmenté de 0,4 %, en juin 2018 de 2,1 % et en juillet 2018 de 7,45 %.
Affirmation : l'augmentation cumulée sur ces trois mois est de 9,95 %.

> Augmenter de t %, c'est multiplier par $1+\dfrac{t}{100}$.
> Augmenter successivement de 0,4 %, de 2,1 % et de 7,45 %, c'est multiplier par
> $\left(1+\dfrac{0,4}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{2,1}{100}\right)\times\left(1+\dfrac{7,45}{100}\right)=1,004\times1,021\times1,0745=1,101\,452\,758$ ce qui correspond à une augmentation de plus de 10,14 %.
> $\boxed{\text{FAUX}}$

Question 2.

Affirmation : toute suite qui tend vers $+\infty$ est croissante.

> Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = n+2(-1)^n$.
>
> - $(-1)^n=-1$ si n est impair et $(-1)^n=1$ si n est pair ; donc $(-1)^n \geqslant -1$ et donc $u_n \geqslant n-1$ pour tout n.
>   Or $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n-1=+\infty$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n=+\infty$.
> - $u_{10}=10+2(-1)^{10}=10+2=12$ et $u_{11}=11+2(-1)^{11}=11-2=9$ donc la suite (u_n) n'est pas croissants.
>
> $\boxed{\text{FAUX}}$

Question 3.

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $u_0=0$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1}=3u_n-2n+3$.
Affirmation : pour tout entier naturel n, $u_n=3^n+n-1$.

> En calculant quelques termes de la suite, on peut conjecturer que l'affirmation est vraie ; on va démontrer par récurrence que, pour tout n, $u_n=3^n+n-1$.
>
> - Pour $n=0$, on a : $u_n=u_0=0$ et $3^n+n-1=3^0+0-1=1-1=0$; la propriété est vraie au rang 0.
> - On suppose la propriété vraie pour $n\geqslant 0$ quelconque : $u_n=3^n+n-1$.
> $u_{n+1}=3u_n-2n+3=3\left(3^n+n-1\right)-2n+3=3^{n+1}+3n-3-2n+3=3^{n+1}+n$
> $=3^{n+1}+(n+1)-1$
>   Donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
> - La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n\geqslant 0$; elle est donc vraie pour tout $n\geqslant 0$.
>
> On a donc démontré que, pour tout n, $u_n=3^n+n-1$.
> $\boxed{\text{VRAI}}$

Question 4.

Affirmation : l'équation $\ln(4x+5)+\ln(x+1)=1$ possède exactement deux solutions dans $\mathbb{R}$.

Pour que cette équation soit valide, il faut que $4x+5>0$ et $x+1>0$, c'est-à-dire $x>-\dfrac{5}{4}$ et $x>-1$; on cherche donc des solutions dans $I=]-1\,;+\infty[$.

$\ln(4x+5)+\ln(x+1)=1 \iff \ln((4x+5)(x+1))=\ln \mathrm{e} \iff (4x+5)(x+1)=\mathrm{e}$
$\iff 4x^2+5x+4x+5-\mathrm{e}=0 \iff 4x^2+9x+5-\mathrm{e}=0$

$\Delta=9^2-4\times4\times(5-\mathrm{e})=81-80+16\mathrm{e}=1+16\mathrm{e}>0$

L'équation admet donc deux solutions :

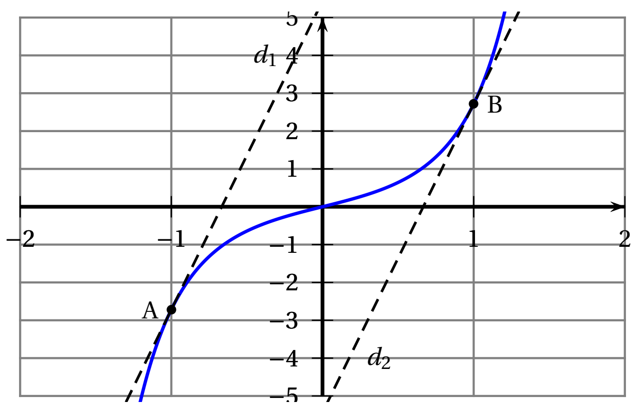
$x'=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-9-\sqrt{1+16\mathrm{e}}}{8}\approx-1{,}96$ et $x''=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\dfrac{-9+\sqrt{1+16\mathrm{e}}}{8}\approx-0{,}29$

Mais $x'<-1$ donc $x'\notin I$; l'équation donnée n'admet donc qu'une seule solution x''.

$\boxed{\text{FAUX}}$

Question 5.

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$.
Sur la figure ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathscr{C}_f$ représentative de la fonction f ainsi que ses tangentes d_1 et d_2 aux points A et B d'abscisses respectives -1 et 1.



Affirmation : d_1 et d_2 sont parallèles.

Les deux droites d_1 et d_2 ont pour coefficients directeurs respectifs $f'(-1)$ et $f'(1)$;
$f(x)=x\mathrm{e}^{x^2}$ donc $f'(x)=1\times\mathrm{e}^{x^2}+x\times2x\mathrm{e}^{x^2}=\left(1+2x^2\right)\mathrm{e}^{x^2}$
On a donc $f'(1)=(1+2\times1^2)\mathrm{e}^{1^2}=3\mathrm{e}$ et $f'(-1)=(1+2\times(-1)^2)\mathrm{e}^{(-1)^2}=3\mathrm{e}$.
$f'(1)=f'(-1)$ donc les droites d_1 et d_2 sont parallèles.

$\boxed{\text{VRAI}}$

Question 6.

Un cycliste part de chez lui à 8 h 00 et doit parcourir une distance de 61 km pour arriver à son point d'arrivée à 9 h 30 au plus tard.
Son parcours est constitué d'une descente de 16 km qu'il parcourt à la vitesse de 80 km/h, puis de 40 km de plat qu'il parcourt à la vitesse de 50 km/h, et enfin d'une montée de 5 km qu'il parcourt à une vitesse de x km/h.
Affirmation : le cycliste sera à l'heure si et seulement si $x\geqslant10$.

- Le trajet en descente est de 16 km effectué à la vitesse de 80 km/h ; il va durer, en minutes, $\dfrac{16 \times 60}{80} = 12$.
- Le trajet sur le plat est de 40 km effectué à la vitesse de 50 km/h ; il va durer, en minutes, $\dfrac{40 \times 60}{50} = 48$.

Les $16 + 40 = 56$ premiers kilomètres ont donc été effectués en $12 + 48 = 60$ minutes.
Il reste donc au maximum 30 minutes pour effectuer le trajet de 5 km en montée.
Si les 5 km sont parcourus en 30 minutes, cela fait du 10 km/h. Pour faire la montée en moins de 30 minutes, il faut pédaler à une vitesse supérieure ou égale à 10 km/h.

$\boxed{\text{VRAI}}$

Question 7.

Soit f une fonction à valeurs réelles, dérivable sur $\mathbb{R}$.
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 1 + f^2(x)$ et $f(1) = 0$.
Affirmation : f est strictement positive sur $[-1 ; 0]$.

$f'(x) = 1 + f^2(x)$ donc $f'(x) > 0$ sur $\mathbb{R}$, donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
Pour x quelconque de $[-1 ; 0]$, $x \leqslant 0$ donc $x < 1$.
f est croissante donc $x < 1$ entraîne $f(x) < f(1)$; or $f(1) = 0$ donc $f(x) < 0$ sur $[-1 ; 0]$.

$\boxed{\text{FAUX}}$

Question 8.

Une urne contient n boules numérotées, indiscernables au toucher. Une boule porte le numéro 10, trois boules portent le numéro 5 et les boules restantes portent le numéro 0.
Après avoir misé 1 €, un joueur tire au hasard l'une des boules et remporte la somme affichée sur la boule.
Affirmation : le jeu est équitable si et seulement si $n = 25$.

- Il y a une seule boule portant le numéro 10 qui rapporte 10 € ; cela fait un gain de $10 - 1 = 9$ € avec une probabilité de $\dfrac{1}{n}$.
- Il y a trois boules portant le numéro 5 qui rapportent 5 € ; cela fait un gain de $5 - 1 = 4$ € avec une probabilité de $\dfrac{3}{n}$.
- Il y a $n - 4$ boules portant le numéro 0 qui rapportent 0 € ; cela fait un gain de -1 € avec une probabilité de $\dfrac{n-4}{n}$.

On établit la loi de probabilité :

Gain	9	4	-1
Probabilité	$\dfrac{1}{n}$	$\dfrac{3}{n}$	$\dfrac{n-4}{n}$

L'espérance mathématique est $E = 9 \times \dfrac{1}{n} + 4 \times \dfrac{3}{n} + (-1) \times \dfrac{n-4}{n} = \dfrac{9 + 12 - n + 4}{n} = \dfrac{25 - n}{n}$.
Le jeu est équitable si et seulement si $E = 0$, c'est-à-dire pour $n = 25$.

$\boxed{\text{VRAI}}$

Question 9.

Une pièce de monnaie est mal équilibrée.
La probabilité de tomber sur FACE est deux fois plus grande que celle de tomber sur PILE.
On lance 15 fois successivement la pièce.
Affirmation : la probabilité de tomber exactement 10 fois sur FACE est supérieure à 0,2.

> La pièce est mal équilibrée donc la probabilité d'obtenir FACE est $p = \dfrac{2}{3}$.
> La variable aléatoire X qui donne le nombre de fois que la pièce tombe sur FACE dans une succession de 15 lancers suit une loi binomiale de paramètres $n = 15$ et $p = \dfrac{2}{3}$.
> $P(X = k) = \dbinom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ donc $P(X = 10) = \dbinom{15}{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{10}\left(1 - \dfrac{2}{3}\right)^{15-10} \approx 0{,}214$
> $\boxed{\text{VRAI}}$

Question 10.

Dans un repère on considère quatre points : A(1 ; 1), B(4 ; 1), C(4 ; 2) et D(1 ; 2).
On définit les points M, N et P par :
$\overrightarrow{\text{DM}} = -2\overrightarrow{\text{BD}}$, $\overrightarrow{\text{CN}} = 5\overrightarrow{\text{CA}}$ et $\overrightarrow{\text{BP}} = 3\overrightarrow{\text{AB}}$.
Affirmation : les points M, N et P sont alignés.

> On calcule les coordonnées des points M, N et P.
>
> - $\overrightarrow{\text{DM}} = -2\overrightarrow{\text{BD}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_{\text{M}} - 1 &=& -2(1-4) \\ y_{\text{M}} - 2 &=& -2(2-1)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_{\text{M}} &=& 7 \\ y_{\text{M}} &=& 0\end{array}\right.$
> - $\overrightarrow{\text{CN}} = 5\overrightarrow{\text{CA}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_{\text{N}} - 4 &=& 5(1-4) \\ y_{\text{N}} - 2 &=& 5(1-2)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_{\text{N}} &=& -11 \\ y_{\text{N}} &=& -3\end{array}\right.$
> - $\overrightarrow{\text{BP}} = 3\overrightarrow{\text{AB}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_{\text{P}} - 4 &=& 3(4-1) \\ y_{\text{P}} - 1 &=& 3(1-1)\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x_{\text{P}} &=& 13 \\ y_{\text{P}} &=& 1\end{array}\right.$
>
> On détermine les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ pour voir s'ils sont colinéaires.
>
> - $\overrightarrow{\text{MN}}\,(-11-7\,;\,-3-0)$ donc $\overrightarrow{\text{MN}}\,(-18\,;\,-3)$
> - $\overrightarrow{\text{MP}}\,(13-7\,;\,1-0)$ donc $\overrightarrow{\text{MP}}\,(6\,;\,1)$
>
> On voit que $\overrightarrow{\text{MN}} = -3\overrightarrow{\text{MP}}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{\text{MN}}$ et $\overrightarrow{\text{MP}}$ sont colinéaires, donc les points M, N et P sont alignés.
> $\boxed{\text{VRAI}}$

PROBLÈME

Soit f la fonction définie sur $I =]0\,;\,+\infty[$ par : $f(x) = x\ln(x) + 1$.
On note $\mathscr{C}_f$ sa courbe dans un repère du plan.

Partie A

1. On détermine les limites de $f(x)$ en 0 et $+\infty$.

- $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\ln(x) = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$
- On sait que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} x\ln(x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{\substack{x\to0\\x>0}} f(x) = 1$

2. On admet que f est dérivable sur I.
$f'(x) = 1 \times \ln(x) + x \times \dfrac{1}{x} + 0 = \ln(x) + 1$

3. Pour étudier les variations de f sur I, on détermine le signe de $f'(x)$ sur I :
$f'(x) > 0 \iff 1 + \ln(x) > 0 \iff \ln(x) > -1 \iff x > \mathrm{e}^{-1}$
Donc la fonction f est strictement décroissante sur $\left]0\,;\,\mathrm{e}^{-1}\right]$ et f est strictement croissante sur $\left[\mathrm{e}^{-1}\,;\,+\infty\right[$. Elle admet un minimum en $x = \mathrm{e}^{-1}$ égal à $f\left(\mathrm{e}^{-1}\right) = \mathrm{e}^{-1}\ln\left(\mathrm{e}^{-1}\right) + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-1}$.

4. Une équation de la tangente Δ à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 1 est $y = f'(1)(x-1) + f(1)$.
$f(1) = 1 \times \ln(1) + 1 = 1$ et $f'(1) = 1 + \ln(1) = 1$ donc l'équation est ; $y = 1(x-1) + 1$ soit $y = x$.

5. On pose, pour tout $x \in I$, $g(x) = f(x) - x$.

   a. $g'(x) = f'(x) - 1 = 1 + \ln(x) - 1 = \ln(x) > 0$ sur $]1\,;\,+\infty[$; donc la fonction g est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, et strictement décroissante sur $]0\,;\,1]$.

   b. La fonction g admet donc un minimum en $x = 1$ égal à $g(1) = f(1) - 1 = 0$; donc, pour tout x de I, $g(x) \geqslant 0$.

   c. Pour tout x de I, $f(x) - x \geqslant 0$ donc $f(x) \geqslant x$; on en déduit que sur I, la courbe $\mathscr{C}_f$ d'équation $y = f(x)$ est au dessus de la droite Δ d'équation $y = x$.

Partie B

1. On établit le tableau de variations de f sur I :

x	0		e^{-1}		α		$+\infty$
$f(x)$	‖ 1	↘	$1 - \mathrm{e}^{-1}$	↗	2	↗	$+\infty$

On en déduit que l'équation $f(x) = 2$ admet une solution unique α sur I

2. On a vu que, pour tout x de I, $f(x) \geqslant x$ donc $f(2) \geqslant 2$; or $2 = f(\alpha)$ donc $f(2) \geqslant f(\alpha)$. Comme la fonction f est croissante sur $\left[\mathrm{e}^{-1} : +\infty\right[$, ça n'est possible que si $2 \geqslant \alpha$, autrement dit $\alpha \leqslant 2$.

3. On admet que $\alpha^2 - \alpha \geqslant 1$.

   a. On résout dans I l'inéquation $x^2 - x \geqslant 1$ dont α est une solution.
   Soit le trinôme $x^2 - x - 1$; $\Delta = 1 + 4 = 5$ donc le trinôme admet deux racines
   $x' = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2} < 0$ et $x'' = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
   Le trinôme est du signe de a donc positif à l'extérieur des racines donc sur $\left]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$.
   Comme α est solution de l'inéquation, on en déduit que $\alpha \in \left]\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\,;\,+\infty\right[$ donc que $\alpha \geqslant \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

   b. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}618$ donc d'après les questions précédentes $1{,}6 \leqslant \alpha \leqslant 2$.

4. On souhaite obtenir un encadrement de α à 0,001 près. L'algorithme suivant répond à cette question :

Variable	a réel
Initialisation	a prend la valeur 1,6
Traitement	Tant que $f(a) < 2$ faire
	a prend la valeur $a + 0{,}001$
	Fin Tant que
Sortie	Afficher $a - 0{,}001$ et a

Partie C

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On modifie le tableau de variation de la fonction f :

x	0		e^{-1}		α_n		$+\infty$
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-\text{e}^{-1}$	$\nearrow$	n	$\nearrow$	$+\infty$

On en déduit que l'équation $f(x) = n$ admet une unique solution dans I ; on l'appelle α_n et on peut dire que $\alpha_n \in \left[\text{e}^{-1}\,;+\infty\right[$.

2. $f(1) = 1$ donc $\alpha_1 = 1$.

3. Pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $f(\alpha_n) = n$ et $f(\alpha_{n+1}) = n+1$; et d'après le tableau de variation de f, $\alpha_n > \text{e}^{-1}$.

S'il existe n tel que $\alpha_n \geqslant \alpha_{n+1}$, comme la fonction f est strictement croissante sur $\left[\text{e}^{-1}\,;+\infty\right[$, on aurait $f(\alpha_n) \geqslant f(\alpha_{n+1})$, soit $n \geqslant n+1$ ce qui est absurde.

Donc, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $\alpha_n < \alpha_{n+1}$ donc la suite (α_n) est croissante.

4. Supposons que la suite (α_n) est majorée par un réel M.

Cela veut dire que pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a $\alpha_n \leqslant M$.

Tout élément de la suite (α_n) appartient à $\left[\text{e}^{-1}\,;+\infty\right[$ et la fonction f est croissante sur $\left[\text{e}^{-1}\,;+\infty\right[$; on en déduit que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, $f(\alpha_n) \leqslant f(M)$, c'est-à-dire $n \leqslant f(M)$, ce qui est absurde car $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} n = +\infty$.

La suite (α_n) n'est donc pas majorée.

5. La suite (α_n) est croissante non majorée donc elle a pour limite $+\infty$.

Partie D

On définit la suite (u_n) par son premier terme u_0 élément de I et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. On suppose que $u_0 = 1$. On va démontrer par récurrence que, pour tout n de $\mathbb{N}$, $u_n = 1$.

- $u_0 = 1$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$ quelconque tel que $u_n = 1$.
  $u_{n+1} = f(u_n) = f(1) = 1$; donc la propriété est vraie au rang $n+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$ donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que si $u_0 = 1$, alors la suite (u_n) est constante et tous ses termes sont égaux à 1.

2. On sait que, pour tout x de I, $f(x) \geqslant x$ (partie A question 5.c.) ; donc $f(\alpha_n) \geqslant \alpha_n$, ce qui veut dire que $\alpha_{n+1} \geqslant \alpha_n$.
La suite (α_n) est donc croissante.

3. On suppose que $u_0 \in]0\,;\,1[$.

a. On établit le tableau de variation de f sur $]0\,;\,1[$.

x	0		e^{-1}		1
$f(x)$	1	$\searrow$	$1-\text{e}^{-1}$	$\nearrow$	1

On en déduit que, pour tout x de $]0\,;\,1[$, alors $1-\text{e}^{-1} < f(x) < 1$ donc $0 < f(x) < 1$.
On va démonter par récurrence que, pour tout n, $0 < u_n < 1$.

- $u_0 \in]0\,;\,1[$ donc la propriété est vraie au rang $n = 0$.
- Soit $n \geqslant 0$ quelconque tel que $0 < u_n < 1$.
  On vient de voir que si $0 < x < 1$, alors $0 < f(x) < 1$ donc $0 < u_n < 1$ entraîne $0 < f(u_n) < 1$, c'est-à-dire $0 < u_{n+1} < 1$.
  La propriété est donc vraie au rang $n+1$.
- La propriété est vraie au rang 0 et elle est héréditaire pour tout $n \geqslant 0$ donc, d'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 0$.

On a donc démontré que si $u_0 \in]0\,;\,1[$, alors $0 < u_n < 1$ pour tout n.

b. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 ; donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite(u_n) est convergente. On appelle ℓ la limite de la suite (u_n).

c. On admet que la limite ℓ est solution de l'équation $f(x) = x$.
D'après l'étude de la fonction g (partie A question 3.), on sait que $f(x) > x$ sur l'intervalle I sauf en $x = 1$ où $f(x) = x$; le nombre 1 est donc la seule solution de $f(x) = x$.
On en déduit que $\ell = 1$.

Tracés non demandés dans le sujet