Entrée à Sciences Po
Samedi 18 février 2017 – **MATHÉMATIQUES**

Problème

En économie, l'élasticité de la demande d'un produit mesure la sensibilité de cette demande par rapport aux variations de prix du produit. L'objet de ce problème est d'étudier l'élasticité d'un produit, afin de déterminer le prix le mieux adapté à la demande.
Étant donné un produit dont le prix est noté x et dont la demande $f(x)$ varie en fonction du prix selon une fonction f strictement positive et dérivable de dérivée f', on appelle élasticité de la demande par rapport au prix la quantité : $E(x) = x \times \dfrac{f'(x)}{f(x)}$.

Partie A : recette et élasticité

Le tarif mensuel d'accès à une salle de sports est de 30 €. Pour ce prix, il y a 1 800 adhérents.

On étudie un modèle selon lequel pour un tarif mensuel p (nombre entier compris entre 30 et 119), le nombre d'adhérents $f(p)$ est égal à $2400 - 20p$. Ainsi, on a bien $f(30) = 1800$.

1. Si la fonction f est définie sur $[30 ; 119]$ par $f(x) = 2400 - 20x$, alors $f'(x) = -20$ donc $E(p) = p \times \dfrac{f'(p)}{f(p)} = p \times \dfrac{-20}{2400 - 20p} = \dfrac{-20p}{-20\left(-120 + p\right)} = \dfrac{p}{p - 120}$.
2. On dit que la demande est élastique si $E(p) < -1$.
   On résout l'inéquation $E(p) < -1$, pour p entier compris entre 30 et 119 :
   $E(p) < -1 \iff \dfrac{p}{p-120} < -1 \iff \dfrac{p}{p-120} + \dfrac{p-120}{p-120} < 0 \iff \dfrac{p + p - 120}{p - 120} < 0$
   $\iff \dfrac{2p - 120}{p - 120} < 0$

x	30		60		119
$2p - 120$		$-$	0	$+$	
$p - 120$		$-$	|	$-$	
$\dfrac{2p-120}{p-120}$		$+$	0	$-$	

   La demande est donc élastique pour p entier entre 61 et 119.
3. On note $R(p)$ la recette mensuelle obtenue pour le prix p, de sorte que $R(p) = p \times f(p)$.
   On admet dans cette question que la recette mensuelle $R(p)$ est maximale lorsque l'élasticité $E(p)$ vaut -1.
   On a vu que $E(p) = -1$ pour $p = 60$; on peut alors calculer la recette mensuelle maximale :
   $R(60) = 60 \times f(60) = 60\,(2400 - 20 \times 60) = 60 \times 1200 = 72000$.
4. $R(p) = p \times f(p)$ donc $R(p) = p\left(2400 - 20p\right)$
   Soit r la fonction définie sur $[30 ; 119]$ par $r(x) = x\,(2400 - 20x)$.
   Les variations de la fonction r vont donner celles de la suite $(R(p))$.
   $r(x) = 2400x - 20x^2$ donc $r'(x) = 2400 - 40x = 40\,(60 - x)$
   - Sur $[30 ; 60[$, $r'(x) > 0$ donc la fonction r est croissante sur $[30 ; 60]$.
   - Sur $]60 ; 119]$, $r'(x) < 0$ donc la fonction r est décroissante sur $[60 ; 119]$.
   - La fonction r admet donc un maximum pour $x = 60$.

   On peut donc en déduire que la suite $(R(p))$ admet un maximum pour $p = 60$.

Partie B : étude d'un cas particulier

La demande hebdomadaire d'un produit informatique est modélisée par la fonction f définie par : $f(x) = (2x+10)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$ pour $x \in [1;+\infty[$. Le nombre $f(x)$ est la quantité demandée, exprimée en milliers d'objets, lorsque le prix unitaire est égal à x, en centaines d'euros.

1. Étude de la fonction demande

a. La fonction f est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et
$f'(x) = 2\times \mathrm{e}^{-0,5x} + (2x+10)\times(-0,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = (-x-3)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$.
Pour tout x, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $-x-3$.
Sur $[1;+\infty[$, $x \geqslant 1$ donc $-x \leqslant -1$ donc $-x-3 \leqslant -4 < 0$; donc la fonction f est strictement décroissante sur $[1;+\infty[$.

b. $f(x) = 2x\mathrm{e}^{-0,5x} + 10\mathrm{e}^{-0,5x}$

- $2x\mathrm{e}^{-0,5x} = 4\dfrac{0,5x}{\mathrm{e}^{0,5x}} = \dfrac{4}{\frac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x}}$

$\dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x}$ est de la forme $\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X}$; or $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{X}}{X} = +\infty$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x} = +\infty$ et donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\dfrac{4}{\frac{\mathrm{e}^{0,5x}}{0,5x}} = 0$.

- On sait que $\displaystyle\lim_{X\to+\infty}\mathrm{e}^{-X} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\mathrm{e}^{-0,5x} = 0$.

On en déduit que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
Ce résultat est cohérent car si le prix de vente x augmente indéfiniment, le nombre de produits achetés va diminuer jusqu'à tendre vers 0.

c. La recette R est définie sur $[1\,;+\infty[$ par $R(x) = x\times f(x)$.
$R(x) = x\times f(x) = x\times(2x+10)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = (2x^2+10x)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$ donc
$R'(x) = (4x+10)\times \mathrm{e}^{-0,5x} + (2x^2+10x)\times(-0,5)\,\mathrm{e}^{-0,5x} = (4x+10-x^2-5x)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$
$= (-x^2-x+10)\,\mathrm{e}^{-0,5x}$
On étudie le signe de $R'(x)$ pour $x\in[1\,;+\infty[$. Pour tout x, $\mathrm{e}^{-0,5x} > 0$ donc $R'(x)$ est du signe de $-x^2-x+10$.
$\Delta = (-1)^2 - 4\times(-1)\times 10 = 41 > 0$ donc le polynôme $-x^2-x+10$ admet deux racines :
$x' = \dfrac{1+\sqrt{41}}{-2} \approx -3,70 < 0$ et $x'' = \dfrac{1-\sqrt{41}}{-2} \approx 2,70$.
On en déduit le signe de $R'(x)$:

x	$-\infty$	x'		1		x''		$+\infty$
$-x^2-x+10$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$R'(x)$					$+$	0	$-$	

On déduit que la fonction R admet un maximum pour $x = x''$ donc pour un prix de vente de x'' centaines d'euros soit environ 270 euros.

2. Étude de l'élasticité de la demande par rapport au prix

a. Pour $x \geqslant 1$, on a $E(x) = x\times\dfrac{f'(x)}{f(x)} = x\times\dfrac{(-x-3)\,\mathrm{e}^{-0,5x}}{(2x+10)\,\mathrm{e}^{-0,5x}} = \dfrac{-x^2-3x}{2x+10}$.

b. On admet que l'élasticité est une approximation du taux de variation de la demande pour une variation de 1 % d'un prix x donné.
Lorsque le prix passe de 1 000 € à 1 010 €, il augmente de 1 %.
Une valeur approchée du taux de variation de la demande lorsque le prix passe de 1 000 € à 1 010 € est donc $E(10) = \dfrac{-100-30}{20+10} = \dfrac{-130}{30} \approx -4,33$.

c. On résout dans $[1\,;+\infty[$ l'équation $E(x) = -3{,}15$.

$E(x) = -3{,}15 \iff \dfrac{-x^2-3x}{2x+10} = -3{,}15 \iff -x^2-3x = -6{,}3x-31{,}5$

$\iff -x^2+3{,}3x+31{,}5 = 0$

$\Delta = 3{,}3^2 - 4\times(-1)\times 31{,}5 = 136{,}89 = 11{,}7^2$; donc l'équation admet deux solutions :

$x' = \dfrac{-3{,}3+11{,}7}{2(-1)} = -4{,}2$ et $x'' = \dfrac{-3{,}3-11{,}7}{2(-1)} = 7{,}5$.

Pour un prix de vente du produit de 750 €, l'élasticité est de $-3{,}15$.

d. On dit que la demande est peu élastique si l'élasticité de la demande par rapport au prix est comprise entre -1 et 0.

On résout les inéquations $-1 < E(x) < 0$ sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$.

- $-1 < E(x) \iff -1 < \dfrac{-x^2-3x}{2x+10} \iff 0 < \dfrac{2x+10}{2x+10} + \dfrac{-x^2-3x}{2x+10} \iff 0 < \dfrac{-x^2-x+10}{2x+10}$

  Sur $[1\,;+\infty[$, $2x+10>0$ donc $-1 < E(x) \iff -x^2-x+10 > 0$ donc pour $x \in \left[1\,;\dfrac{\sqrt{41}-1}{3}\right[$ d'après la question **B 1.c.**
- $2x+10>0$ donc $E(x)<0 \iff -x^2-3x<0 \iff -x(x+3)<0$ ce qui est toujours vrai si $x \geqslant 1$.

$\dfrac{\sqrt{41}-1}{3} \approx 2{,}70$ donc la demande est peu élastique pour x compris entre 1 et 2,7 donc pour un prix de vente compris entre 100 € et 270 €.

Partie C : étude théorique

Dans cette partie, si f désigne une fonction ne s'annulant pas sur $]0\,;+\infty[$, de dérivée f' sur cet intervalle, on note $E_f(x)$ l'élasticité de la fonction f par rapport à la variable x, de sorte que :

$E_f(x) = x \times \dfrac{f'(x)}{f(x)}$ pour $x \in\,]0\,;+\infty[$.

1. **Quelques fonctions particulières**

   a. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = x^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

   $f'(x) = nx^{n-1}$ donc $E_f(x) = x \times \dfrac{nx^{n-1}}{x^n} = n$ donc l'élasticité est constante.

   b. Soit f la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x$.

   $f'(x) = \mathrm{e}^x$ donc $E_f(x) = x \times \dfrac{\mathrm{e}^x}{\mathrm{e}^x} = x$

2. **Règles opératoires**

   Soient un réel λ et deux fonctions f et g ne s'annulant pas sur $]0\,;+\infty[$, dérivables sur cet intervalle. Pour tout $x>0$, on a :

   a. $E_{\lambda\times f}(x) = x \times \dfrac{(\lambda f)'(x)}{(\lambda f)(x)} = x \times \dfrac{\lambda f'(x)}{\lambda f(x)} = x \times \dfrac{f'(x)}{f(x)} = E_f(x)$.

   b. $E_{f\times g}(x) = x \times \dfrac{(fg)'(x)}{(fg)(x)} = x \times \dfrac{f'(x)g(x)+f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = x \times \dfrac{f'(x)g(x)}{f(x)g(x)} + x \times \dfrac{f(x)g'(x)}{f(x)g(x)}$

   $= x \times \dfrac{f'(x)}{f(x)} + x \times \dfrac{g'(x)}{g(x)} = E_f(x) + E_g(x)$

   c. $E_{\frac{f}{g}}(x) = x \times \dfrac{\left(\frac{f}{g}\right)'(x)}{\left(\frac{f}{g}\right)(x)} = x \times \dfrac{\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}}{\frac{f(x)}{g(x)}} = x \times \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2} \times \dfrac{g(x)}{f(x)}$

   $= x \times \dfrac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = x \times \dfrac{f'(x)g(x)}{f(x)g(x)} - x \times \dfrac{f(x)g'(x)}{f(x)g(x)} = x \times \dfrac{f'(x)}{f(x)} - x \times \dfrac{g'(x)}{g(x)}$

   $= E_f(x) - E_g(x)$

3. Soit h la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $h(x) = \dfrac{2017\,\text{e}^{x}}{x^2}$.
   Soit f la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $f(x) = \text{e}^{x}$, et g la fonction définie sur $]0~;~+\infty[$ par $g(x) = x^2$; donc $h(x) = \dfrac{2017f(x)}{g(x)}$. On a alors
   $E_h(x) = E_{\frac{2017f}{g}}(x) = E_{2017f}(x) - E_g(x)$ d'après **2.c.**
   $ = E_f(x) - E_g(x)$ d'après **2.a.**
   $ = x - 2$ d'après **1.a.** et **1.b.**

Vrai ou Faux

1. On considère deux fonctions f et g ayant les propriétés suivantes :

$$f(x) \leqslant g(x) \text{ pour tout réel } x \text{ et } \lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$$

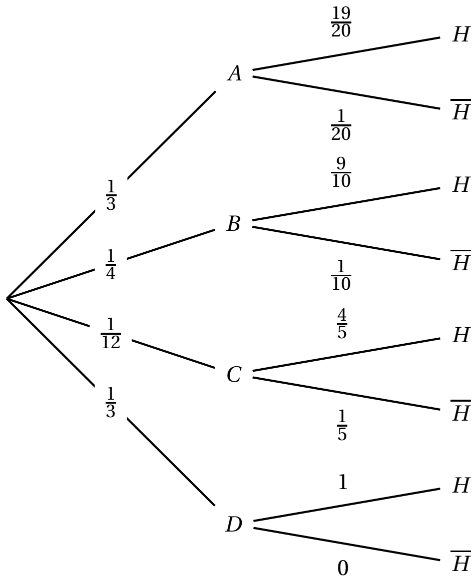
Affirmation : Pour tout réel x, on a : $2 \leqslant g(x)$.

> Prenons par exemple $f(x) = 2 - \dfrac{2}{x^2+1}$ et $g(x) = 2 - \dfrac{1}{x^2+1}$.
> $g(x) = f(x) + \dfrac{1}{x^2+1}$ donc $g(x) > f(x)$ pour tout réel x.
> $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 2$ et pourtant $g(x) < 2$ pour tout x.
> **Affirmation fausse**

2. Pour se rendre à son examen, une personne a le choix entre 4 itinéraires : A, B, C et D.
La probabilité de choisir A est $\dfrac{1}{3}$, de choisir B est $\dfrac{1}{4}$ et de choisir C est $\dfrac{1}{12}$.
La probabilité d'arriver en retard avec A est $\dfrac{1}{20}$, avec B $\dfrac{1}{10}$ et avec C $\dfrac{1}{5}$.
En empruntant D, elle est certaine d'arriver à l'heure.

Affirmation : La probabilité qu'elle arrive à l'heure est inférieure à $\dfrac{11}{12}$.

> On considère A, B, C et D les événements respectifs correspondant aux itinéraires A, B, C et D, et H l'événement « la personne arrive à l'heure ».
> On résume les informations du texte dans un arbre pondéré :



> D'après la formule des probabilités totales :
> $P(H) = P(A) \times P_A(H) + P(B) \times P_B(H) + P(C) \times P_C(H) + P(D) \times P_D(H)$
> $\quad = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{19}{20} + \dfrac{1}{4} \times \dfrac{9}{10} + \dfrac{1}{12} \times \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{3} \times 1 = \dfrac{113}{120}$; or $\dfrac{113}{120} > \dfrac{11}{12}$
> **Affirmation fausse**

3. On considère l'algorithme suivant.

Entrée :	Saisir un entier naturel n supérieur ou égal à 1
Traitement :	Affecter à A la valeur 0.
	Pour k allant de 1 à n
	Affecter à A la valeur $A+\dfrac{1}{k}$
	Fin pour
	Affecter à A la valeur nA
Sortie :	Afficher A

Affirmation : pour $n = 6$, le résultat affiché est 14,7.

> Pour $n = 6$, le résultat affiché est $6\times\left(0+\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}\right) = 14{,}7$
> **Affirmation vraie**

4. Dans un plan muni d'un repère orthonormé, on considère les points :
A $(-1~;~2)$, B $(6~;~-5)$, C $(-2~;~-1)$ et D $(0~;~1)$.
Affirmation : D est le point d'intersection de la droite (AB) et de la perpendiculaire à cette droite passant par C.

> L'affirmation est vraie si le point D appartient à la droite (AB) et si les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
>
> - Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ a pour coordonnées $(6-(-1)~;-5-2) = (7~;-7)$.
> Le vecteur $\overrightarrow{AD}$ a pour coordonnées $(0-(-1)~;1-2) = (1~;-1)$.
> On voit que $\overrightarrow{AB} = 7\overrightarrow{AD}$ donc les deux vecteurs sont colinéaires et donc les points A, B et D sont alignés.
> - Le vecteur $\overrightarrow{CD}$ a pour coordonnées $(0-(-2)~;1-(-1)) = (2~;2)$.
> $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} = 7\times 2+(-7)\times 2 = 0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{CD}$ donc les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.
>
> **Affirmation vraie**

5. On donne : $\cos\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

Affirmation : $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

> On sait que, pour tout réel x, on a : $\cos^2 x+\sin^2 x = 1$.
> Donc $\sin^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1-\cos^2\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = 1-\left(\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}\right)^2 = 1-\dfrac{2+\sqrt{2}}{4} = \dfrac{4-2-\sqrt{2}}{4} = \dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$
> On en déduit que $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ ou $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = -\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
> Mais $0<\dfrac{\pi}{8}<\pi$ donc $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right)>0$. On a donc : $\sin\left(\dfrac{\pi}{8}\right) = \dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.
> **Affirmation vraie**

6. La suite (u_n) est définie par $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + 2n - 1$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

Affirmation : Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, $u_n = 16\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$.

On calcule quelques termes de la suite (u_n) :

$u_{1+1} = \dfrac{1}{2}u_1 + 2\times 1 - 1 = \dfrac{1}{2}\times 2 + 2 - 1$ donc $u_2 = 2$

$u_{2+1} = \dfrac{1}{2}u_2 + 2\times 2 - 1 = \dfrac{1}{2}\times 2 + 4 - 1$ donc $u_3 = 4$

$u_{3+1} = \dfrac{1}{2}u_3 + 2\times 3 - 1 = \dfrac{1}{2}\times 4 + 6 - 1$ donc $u_4 = 7$

On calcule $16\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$ pour quelques valeurs de n :

Pour $n = 1$, $16\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4n - 10 = 16\times\dfrac{1}{2} + 4 - 10 = 2 = u_1$

Pour $n = 2$, $16\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4n - 10 = 16\times\dfrac{1}{4} + 8 - 10 = 2 = u_2$

Pour $n = 3$, $16\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4n - 10 = 16\times\dfrac{1}{8} + 12 - 10 = 4 = u_3$

Pour $n = 4$, $16\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4n - 10 = 16\times\dfrac{1}{16} + 16 - 10 = 7 = u_4$

On peut conjecturer que pour $n \geqslant 1$, $u_n = 16\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4n - 10$.

On va démontrer cette propriété par récurrence.

- Pour $n = 1$, on a déjà vu que $16\left(\dfrac{1}{2}\right)^n + 4n - 10 = 16\times\dfrac{1}{2} + 4 - 10 = 2 = u_1$; donc la propriété est vraie pour $n = 1$.
- On suppose la propriété vraie pour un entier quelconque $k \geqslant 1$, c'est-à-dire que $u_k = 16\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + 4k - 10$.

  On va démontrer que cette propriété est vraie au rang $k + 1$.

  $$u_{k+1} = \dfrac{1}{2}u_k + 2k - 1 = \dfrac{1}{2}\left(16\left(\dfrac{1}{2}\right)^k + 4k - 10\right) + 2k - 1 = 16\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} + 2k - 5 + 2k - 1$$
  $$= 16\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} + 4k - 6 = 16\left(\dfrac{1}{2}\right)^{k+1} + 4(k+1) - 10$$

  La propriété est donc vraie au rang $k + 1$.
- La propriété est vraie au rang 1, et elle est héréditaire pour tout $k \geqslant 1$. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout $n \geqslant 1$.

Affirmation vraie

7. On considère un entier naturel n supérieur ou égal à 1.
Un archer effectue n tirs consécutifs sur une cible.
La réussite ou l'échec à un tir n'influence pas les tirs suivants. Ainsi, à chaque tir, la probabilité qu'il atteigne la cible est de $\dfrac{2}{5}$.

Affirmation : Pour $n \geqslant 10$, la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible lors des n lancers est supérieure ou égale à 0,999.

Si X est la variable aléatoire qui donne le nombre de succès, on cherche $P(X \geqslant 1)$, c'est-à-dire $1 - P(X = 0)$. On résout donc l'inéquation $1 - P(X = 0) \geqslant 0{,}999$, c'est-à-dire $P(X = 0) \leqslant 0{,}001$.
La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres n et $p = \dfrac{2}{5}$.
$P(X = 0) = \dbinom{n}{0}\left(\dfrac{2}{5}\right)^0\left(1 - \dfrac{2}{5}\right)^{n-0} = \left(\dfrac{3}{5}\right)^n = (0{,}6)^n$; on résout l'inéquation :
$$(0{,}6)^n \leqslant 0{,}001 \iff \ln\left((0{,}6)^n\right) \leqslant \ln(0{,}001) \iff n\ln(0{,}6) \leqslant \ln(0{,}001)$$
$$\iff n \geqslant \dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}6)}$$
$\dfrac{\ln(0{,}001)}{\ln(0{,}6)} \approx 13{,}5$ donc c'est pour $n \geqslant 14$ que la probabilité qu'il atteigne au moins une fois la cible lors des n lancers est supérieure ou égale à 0,999.
Affirmation fausse

8. Pour tout réel $m > 0$, on considère l'équation $(E_m) : 2mx^2 + (4m+1)x + 2 = 0$.
Affirmation : L'équation (E_m) admet toujours deux solutions.

On calcule le discriminant :
$\Delta = (4m+1)^2 - 4 \times 2m \times 2 = 16m^2 + 8m + 1 - 16m = 16m^2 - 8m + 1 = (4m-1)^2$.
Pour $m = \dfrac{1}{4}$, on a $\Delta = 0$ et donc l'équation $\left(E_{\frac{1}{4}}\right)$ n'admet qu'une solution.
Affirmation fausse

9. Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$.

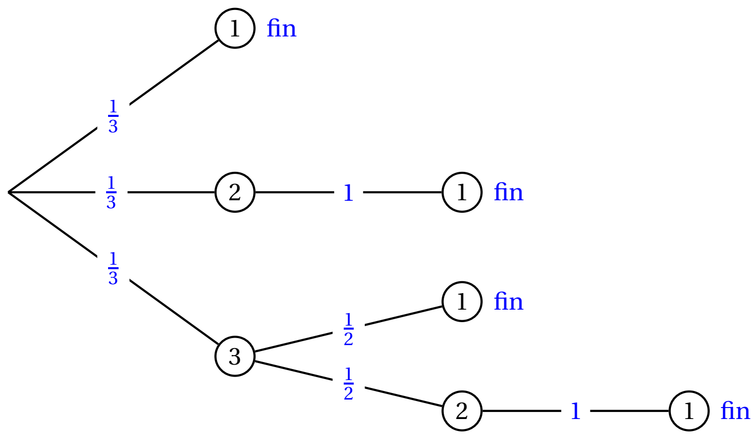
Affirmation : La courbe représentative de f admet au moins une tangente qui passe par l'origine.

Pour $a > 0$, la tangente à la courbe représentant f au point de la courbe d'abscisse a a pour équation $y = f'(a)\left(x - a\right) + f(a)$ soit $y = f'(a)x - af'(a) + f(a)$.
Cette tangente passe par l'origine si et seulement si $-af'(a) + f(a) = 0$.
$f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ donc $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln x \times 1}{x^2} = \dfrac{1 - \ln x}{x^2}$.
$$-af'(a) + f(a) = 0 \iff -a \times \dfrac{1 - \ln a}{a^2} + \dfrac{\ln a}{a} = 0 \iff \dfrac{-1 + \ln a}{a} + \dfrac{\ln a}{a} = 0$$
$$\iff \dfrac{-1 + 2\ln a}{a} = 0 \iff -1 + 2\ln a = 0 \iff \ln a = \dfrac{1}{2}$$
$$\iff a = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}}$$
Il existe donc une tangente à la courbe (et une seule) qui passe par l'origine.
Affirmation vraie

10. Une urne U contient 3 boules numérotées de 1 à 3.
On effectue une succession de tirages d'une boule en appliquant la règle suivante : si la boule tirée porte le numéro k, on enlève de l'urne toutes les boules dont le numéro est supérieur ou égal à k avant de procéder au tirage suivant.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider l'urne U de toutes ses boules.

Affirmation : l'espérance $E(X)$ est strictement supérieure à 2.

D'après le texte, l'urne est vide quand on a tiré la boule numérotée 1.
On regroupe les informations du texte dans un arbre :



On en déduit la loi de probabilité de la variable aléatoire X qui donne le nombre de lancers pour que l'urne soit vide :

n_i	1	2	3
$p_i = P(X = n_i)$	$\dfrac{1}{3}$	$\dfrac{1}{3} \times 1 + \dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{2} \times 1 = \dfrac{1}{6}$

$E(X) = \sum n_i \times p_i = \left(1 \times \dfrac{1}{3}\right) + \left(2 \times \dfrac{1}{2}\right) + \left(3 \times \dfrac{1}{6}\right) = \dfrac{11}{6} < 2$

Affirmation fausse