Corrigé entrée à Sciences Po

ADMISSION AU COLLÈGE UNIVERSITAIRE 2016

Samedi 20 février 2016

MATHÉMATIQUES

durée de l'épreuve : 3 h

Les calculatrices sont autorisées.

Problème

La partie A est indépendante des parties B et C

Partie A

Une banque propose un contrat d'assurance vie qui fonctionne de la façon suivante. À l'ouverture du contrat en janvier 2016, le client dépose 5 000 euros. Le 31 décembre de chaque année, la banque ajoute des intérêts à hauteur de 2 %. Puis chaque année, le 1er janvier, le client dépose 500 euros. Les intérêts produits une année engendrent eux-mêmes des intérêts les années suivantes.
On note I_n le solde de l'assurance vie au 1er janvier de l'année $(2016+n)$. Ainsi $I_0 = 5000$.

1. $I_1 = I_0 \times 1,02 + 500 = 5000 \times 1,02 + 500 = 5600$;
   $I_2 = I_1 \times 1,02 + 500 = 5600 \times 1,02 + 500 = 6212$;
   $I_3 = I_2 \times 1,02 + 500 = 6212 \times 1,02 + 500 = 6836,24$.
2. Ajouter chaque année 2 % d'intérêts c'est multiplier le capital par 1,02 et comme on rajoute chaque début d'année 500 €, on a bien $I_{n+1} = 1,02I_n + 500$.
3. $K_n = I_n + 25000$, donc $K_{n+1} = I_{n+1} + 25000 = 1,02I_n + 500 + 25000 = 1,02I_n + 25500$.
   Or $25500 = 25000 \times 1,02$, donc
   $K_{n+1} = 1,02I_n + 0,02 \times 25000 = 1,02\left(I_n + 25000\right) = 1,02K_n$.
   Cette égalité montre que la suite (K_n) est géométrique de raison 1,02 et de premier terme $K_0 = I_0 + 25000 = 30000$.
4. On sait que pour tout naturel n, $K_n = K_0 \times 1,02^n = 30000 \times 1,02^n$.
   Or $K_n = I_n + 25000 \iff I_n = K_n - 25000 = 30000 \times 1,02^n - 25000$.
5. Comme $1,02 > 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty} 1,02^n = +\infty$ et par conséquent $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = +\infty$.

Variables :	n est un naturel
	i est un décimal à deux décimales
Initialisation :	Affecter à n la valeur 0
	Affecter à i la valeur 5 000
Traitement :	Tant que $i < 20000$
	Affecter à n la valeur $n+1$
	Affecter à i la valeur $1,02 \times i + 500$
	Fin du Tant que
Affichage :	Afficher $2016 + n$

Le solde (20 470 €) sera supérieur à 20 000 euros au bout de 21 années, soit en 2037.

Partie B

Soit f la fonction définie pour $x \geqslant 1$ par

$$f(x) = \frac{30x - 16}{15x - 2}.$$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.

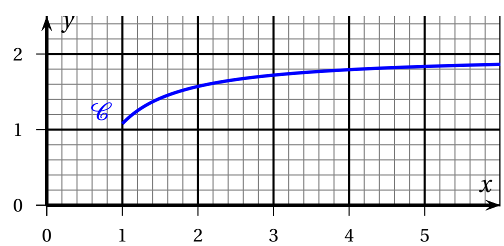
1. $f(1) = \dfrac{30 - 16}{15 - 2} = \dfrac{14}{13}$.

   On peut écrire puisque $x \neq 0$, $f(x) = \dfrac{30 - \frac{16}{x}}{15 - \frac{2}{x}}$.

   On sait que $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{16}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{30}{15} = 2$.

   Ceci montre que la courbe $\mathcal{C}$ admet au voisinage de plus l'infini une asymptote horizontale d'équation $y = 2$.
2. Comme $x \geqslant 1$, $15x - 2 \geqslant 13 > 0$: la fonction f est donc dérivable sur $[1~;~+\infty[$ et on a :

   $f'(x) = \dfrac{30(15x - 2) - 15(30x - 16)}{(15x - 2)^2} = \dfrac{-60 + 240}{(15x - 2)^2} = \dfrac{180}{(15x - 2)^2}$
3. La dérivée est clairement supérieur à zéro quelque soit le réel x ; la fonction f est donc croissante de $f(1) = \dfrac{14}{13}$ à 2.
4.



Partie C

Un cadre de la banque envisage la commercialisation d'un produit financier dont la valeur, en centaines d'euros à la fin de l'année $(2016 + n)$, serait modélisée par la suite (u_n) définie par :

$$u_0 = 1 \quad \text{et pour tout entier } n,\ u_{n+1} = f(u_n).$$

1. *Initialisation :* $u_0 = 1$, donc on a bien $1 \leqslant u_0 \leqslant 2$.

   Hérédité : supposons qu'il existe un naturel p tel que $1 \leqslant u_p \leqslant 2$.

   On a $u_{p+1} = f\left(u_p\right)$: or on a vu dans la partie B que pour $x \geqslant 1$, alors $1 \leqslant f(x) \leqslant 2$, donc $1 \leqslant u_{p+1} \leqslant 2$.

   On a donc démontré par récurrence que pour tout entier n, $1 \leqslant u_n \leqslant 2$.
2. $$v_n = \frac{15u_n - 20}{15u_n - 12}$$

   a. Comme $1 \leqslant u_n \leqslant 2$, $15 \leqslant 15u_n \leqslant 30$ et $3 \leqslant 15u_n - 12 \leqslant 18$; le dénominateur est donc non nul, v_n existe quel que soit le naturel n.

   b. On a $u_0 = 1$, $u_1 = f(u_0) = \dfrac{14}{13}$ et $u_2 = f(u_1) = \dfrac{30 \times \frac{14}{13} - 16}{15 \times \frac{14}{13} - 2} = \dfrac{\frac{212}{13}}{\frac{184}{13}} = \dfrac{212}{184} = \dfrac{53}{46}$.

   $v_0 = \dfrac{15u_0 - 20}{15u_0 - 12} = \dfrac{-5}{3} = -\dfrac{5}{3}$;

$v_1 = \dfrac{15u_1 - 20}{15u_1 - 12} = \dfrac{15 \times \dfrac{14}{13} - 20}{15 \times \dfrac{14}{13} - 12} = \dfrac{-\frac{50}{13}}{\frac{54}{13}} = -\dfrac{50}{57}$;

$v_2 = \dfrac{15u_2 - 20}{15u_2 - 12} = \dfrac{15 \times \dfrac{53}{46} - 20}{15 \times \dfrac{53}{46} - 12} = \dfrac{-\frac{125}{46}}{\frac{243}{46}} = -\dfrac{125}{243}$.

On a $v_{n+1} = \dfrac{15u_{n+1} - 20}{15u_{n+1} - 12} = \dfrac{15\frac{30u_n-16}{15u_n-2} - 20}{15\frac{30u_n-16}{15u_n-2} - 12} = \dfrac{15(30u_n - 16) - 20(15u_n - 2)}{15(30u_n - 16) - 12(15u_n - 2)} =$
$\dfrac{450u_n - 240 - 300u_n + 40}{450u_n - 240 - 180u_n + 24} = \dfrac{150u_n - 200}{270u_n - 216} = \dfrac{75u_n - 100}{135u_n - 108} = \dfrac{5(15u_n - 20)}{9(15u_n - 12)} =$
$\dfrac{5}{9}\dfrac{15u_n - 20}{15u_n - 12} = \dfrac{5}{9}v_n$.

L'égalité $v_{n+1} = \dfrac{5}{9}v_n$ montre que la suite (v_n) est géométrique de premier terme $-\dfrac{5}{3}$ et de raison $\dfrac{5}{9}$.

c. On sait que quel que soit le naturel n, $\quad v_n = -\dfrac{5}{3} \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n$.

d. $v_n = \dfrac{15u_n - 20}{15u_n - 12} \iff v_n(15u_n - 12) = 15u_n - 20 \iff 15u_n v_n - 12v_n = 15u_n - 20 \iff u_n(15 - 15v_n) = 20 - 12v_n$ et enfin pour $v_n \neq 1$,
$u_n = \dfrac{20 - 12v_n}{15 - 15v_n}$.
On a donc :

$u_n = \dfrac{20 - 12v_n}{15 - 15v_n} = \dfrac{20 - 12 \times \left(-\dfrac{5}{3}\right) \times \left(\dfrac{5}{9}\right)^n}{15 - 15 \times \left(-\dfrac{5}{3}\right)\left(\dfrac{5}{9}\right)^n} = \dfrac{20 + 20\left(\dfrac{5}{9}\right)^n}{15 + 25\left(\dfrac{5}{9}\right)^n} = \dfrac{4 + 4\left(\dfrac{5}{9}\right)^n}{3 + 5\left(\dfrac{5}{9}\right)^n} =$
$\dfrac{4 \times 9^n + 4 \times 5^n}{3 \times 9^n + 5 \times 5^n}$.

$$u_n = \dfrac{4 \times 5^n + 4 \times 9^n}{5 \times 5^n + 3 \times 9^n}.$$

e. Établir un algorithme permettant de déterminer la première année pour laquelle le taux de variation de ce produit financier sera inférieur à 2 %. Déterminer cette année.

Exercice : Vrai ou Faux

Pour chacune des affirmations suivantes, dire si elle est vraie ou fausse en justifiant soigneusement la réponse.

1. On dispose d'un dé à quatre faces bien équilibré, dont les faces sont numérotées de 1 à 4. Un joueur qui lance le dé gagne 3 euros s'il tombe sur 4, 1 euro s'il tombe sur 1 et perd 2 euros sinon.

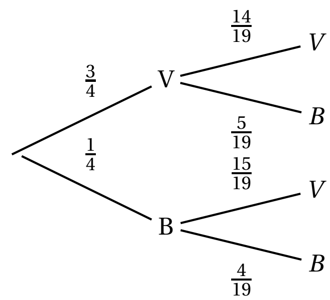
   On note G la variable aléatoire égale au gain du joueur.

   On a $E(G) = 1 \times \dfrac{1}{4} + (-2) \times \dfrac{1}{4} + (-2) \times \dfrac{1}{4} + 3 \times \dfrac{1}{4} = \times \dfrac{1}{4} \times (1-2-2+3) = 0$.

   Proposition : l'espérance de G est nulle.

   La proposition est vraie.

2. Une urne contient 15 chaussettes vertes et 5 chaussettes bleues. Une personne tire successivement et sans remise deux chaussettes.



   La probabilité de tirer deux chaussettes de même couleur est :

   $p(V) \times p_V(V) + p(B) \times p_B(B) = \frac{3}{4} \times \frac{14}{19} + \frac{1}{4} \times \frac{4}{19} = \frac{42+4}{4\times 19} = \frac{46}{76} = \dfrac{23}{38} \approx 0{,}6052$ soit 0,605 au millième près.

   Proposition : la probabilité qu'il obtienne deux chaussettes de la même couleur, arrondie à 10^{-3}, est égale à $0,605$.

   La proposition est vraie.

3. Une usine fabrique des assiettes en grande quantité. On admet que 4 % des assiettes fabriquées sont cassées. On prélève au hasard 100 assiettes, et on considère que le stock d'assiettes disponibles est très important.

   On a une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,04$.

   La probabilité cherchée est celle qu'il y ait 0 ou 1 assiette cassée, soit :

   $0,04^0 \times 0,96^{100} + 100 \times 0,04 \times 0,96^{99} \approx 0,087 < 0,1$.

   Proposition : la probabilité qu'au moins 99 assiettes ne soient pas cassées est supérieure à $0,1$.

   La proposition est fausse.

4. Soient $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction exponentielle dans un repère et (D) la tangente à cette courbe au point d'abscisse 0.

   $(\mathscr{C})$ a pour équation $y = f(x) = \mathrm{e}^x$.

   Pour $x = 0,\ y = 1$.

   La tangente au point de coordonnées $(0\,;\,1)$ a pour équation :

   $y - f(0) = f'(0)(x-0)$; or $f'(x) = \mathrm{e}^x$, donc $f'(0) = 1$.

   L'équation est donc : $y - 1 = 1 \times x$ ou encore $y = d(x) = x + 1$.

   Considérons la fonction δ définie sur $\mathbb{R}$ par :

   $\delta(x) f(x) - d(x) = \mathrm{e}^x - (x+1) = \mathrm{e}^x - x - 1$.

   On a $\delta'(x) = \mathrm{e}^x - 1$;

   - $\delta'(x) > 0 \iff \mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff x > 0$;
   - $\delta'(x) < 0 \iff \mathrm{e}^x - 1 < 0 \iff \mathrm{e}^x < 1 \iff x < 0$;

- $\delta'(x) = 0 \iff \text{e}^x - 1 = 0 \iff \text{e}^x = 1 \iff x = 0$.

La fonction δ est donc décroissante puis croissante avec un minimum pour $x = 0$ qui vaut 0.

Donc $f(x) > d(x)$ ce qui signifie que la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de la droite (D) pour tout réel, ... sauf pour $x = 0$

Proposition : la courbe $(\mathscr{C})$ est au-dessus de la droite (D).

La proposition est fausse.

5. Dans un repère orthonormé, on note (d) la droite, passant par A(2 ; 1) et parallèle à la droite (d') d'équation $x - 2y + 3 = 0$.

Une équation de d est $x - 2y + k = 0$ avec $k \in \mathbb{R}$.

$\text{A}(2\,;\,1) \in (d) \iff 2 - 2 \times 1 + k = 0 \iff k = 0$.

Une équation de d est donc $x - 2y = 0 \iff x = 2y \iff y = \frac{x}{2}$.

Proposition : (d) a pour équation $y = \dfrac{x}{2}$.

La proposition est vraie.

6. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \left(x^2 - 1\right)\ln(x)$.

La proposition est vraie si $f'(1) = 0$.

Or $f'(x) = 2x\ln x + \dfrac{x^2 - 1}{x}$, d'où $f'(1) = 2 \times 1 \ln 1 + \dfrac{1^2 - 1}{1} = 0 + 0 = 0$.

Proposition : dans un repère orthonormé, la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est horizontale.

La proposition est vraie.

7. Dans un repère orthonormé, on désigne par A, B et C les points de coordonnées A(1 ; 3), B(6 ; 4) et C(7 ; −1).

On a : $\text{AB}^2 = (6 - 1)^2 + (4 - 3)^2 = 5^2 + 1^2 = 26$;

$\text{AC}^2 = (7 - 1)^2 + (-1 - 3)^2 = 6^2 + (-4)^2 = 52$;

$\text{BC}^2 = (7 - 6)^2 + (-1 - 4)^2 = 1^2 + (-5)^2 = 26$.

On a donc $\text{AB}^2 = \text{BC}^2$, d'où AB = BC : le triangle ABC est isocèle en B.

D'autre part : $26 + 26 = 52 \iff \text{AB}^2 + \text{BC}^2 = \text{AC}^2$, donc d'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle ABC est rectangle en B.

Proposition : le triangle ABC est rectangle isocèle.

La proposition est vraie.

8. **Proposition :** Pour tout réel x, $\sin(\pi - x) = \sin(x)$.

La proposition est vraie.

9. Soit (u_n) une suite croissante minorée.

La suite définie pour , par $u_n = n^2$ est croissante minorée par 0 et ne converge pas.

Proposition : la suite (u_n) converge.

La proposition est fausse.

10. f est une fonction définie sur $\mathbb{R}$, positive et croissante.

Contre-exemple : la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1 + \text{e}^{-x}}$ est positive croissante et a pour limite 1 au voisinage de plus l'infini.

Proposition : La limite de la fonction f en $+\infty$ est $+\infty$.

La proposition est fausse.

FIN