Entrée École de santé des armées 12 avril 2019 - Corrigé

EXERCICE 1 — 6 points

QCM 1

$\dfrac{\left(\mathrm{e}^{2}\right)^{4} \times \sqrt{\mathrm{e}^{6}}}{\mathrm{e}^{5} \times \sqrt{\mathrm{e}^{12}}} =$

A. 0 **B.** $\boxed{1}$ **C.** e **D.** e^{-2}

> $\dfrac{\left(\mathrm{e}^{2}\right)^{4} \times \sqrt{\mathrm{e}^{6}}}{\mathrm{e}^{5} \times \sqrt{\mathrm{e}^{12}}} = \dfrac{\mathrm{e}^{8} \times \mathrm{e}^{3}}{\mathrm{e}^{5} \times \mathrm{e}^{6}} = \dfrac{\mathrm{e}^{11}}{\mathrm{e}^{11}} = 1$

QCM 2

L'inéquation $|\ln x| > 0$ a pour solution

A. $\boxed{]0\,;\,1[\cup]1\,;\,+\infty[}$ **B.** $]1\,;\,+\infty[$ **C.** $]0\,;\,1[$ **D.** $]0\,;\,+\infty[$

> Par définition de la valeur absolue, $|\ln x| \geqslant 0$.
> Les solutions de l'inéquation $|\ln x| > 0$ sont donc les valeurs de x pour lesquelles $\ln x$ existe et $\ln x \neq 0$.

QCM 3

Dans une université de médecine où la moitié des étudiants travaille sérieusement, 60 % des élèves sont reçus au concours de fin d'année. De plus, parmi ceux qui travaillent sérieusement, 90 % réussissent le concours.
Quelle est la probabilité qu'un étudiant réussisse le concours sachant qu'il n'a pas travaillé sérieusement ?

A. $\boxed{0{,}3}$ **B.** 0,15 **C.** 0,01 **D.** 0,505

> On appelle T l'évènement « l'étudiant a travaillé » et R l'évènement « l'étudiant a réussi son concours ». On cherche donc $P_{\overline{T}}(R)$.
> D'après le texte, on sait que $P(T) = P\left(\overline{T}\right) = 0{,}5$, $P(R) = 0{,}6$ et $P_T(R) = 0{,}9$.
> On sait, d'après la formule des probabilités totales, que $P(R) = P(T \cap R) + P\left(\overline{T} \cap R\right)$
> donc $P(R) = P(T) \times P_T(R) + P\left(\overline{T}\right) \times P_{\overline{T}}(R)$
> On en déduit que $0{,}6 = 0{,}5 \times 0{,}9 + 0{,}5 \times P_{\overline{T}}(R)$ donc $P_{\overline{T}}(R) = 0{,}3$.

QCM 4

On pose $z = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. Alors z^2 est égal à :

A. z^3 **B.** $\boxed{\dfrac{1}{z}}$ **C.** $1 - \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ **D.** $-\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z=-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $z^2=\left(-\frac{1}{2}+\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\left(-\frac{1}{2}\right)^2-2\times\frac{1}{2}\times\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}+\left(\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\frac{1}{4}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=-\frac{1}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$

On peut donc éliminer les réponses C et D. Mais $z^2=z^3$ seulement si $z=0$ ou $z=1$, ce qui n'est pas le cas; on peut donc éliminer la réponse A.

QCM 5

$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x=$

A. $(\ln 2)^3$ **B.** $\ln 2^3$ **C.** $\boxed{\dfrac{(\ln 2)^3}{3}}$ **D.** $-\dfrac{1}{2^3}$

La fonction $x\longmapsto \frac{1}{x}(\ln x)^2$ est de la forme $u'u^2$ donc a pour primitive la fonction $x\longmapsto\frac{(\ln x)^3}{3}$.

$\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}(\ln x)^2\,\mathrm{d}x=\left[\frac{(\ln x)^3}{3}\right]_1^2=\frac{(\ln 2)^3}{3}-\frac{(\ln 1)^3}{3}=\frac{(\ln 2)^3}{3}$

QCM 6

La durée d'efficacité d'un médicament, en heures, peut être modélisée par une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle.
Quel est le paramètre λ de cette loi sachant que $P(X\geqslant 20)=0,3$?

A. $-\dfrac{\ln 0,7}{20}$ **B.** $\dfrac{\ln 0,3}{20}$ **C.** $\boxed{-\dfrac{\ln 0,3}{20}}$ **D.** $20\ln(0,3)$

Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, alors $P(X\geqslant t)=\mathrm{e}^{-\lambda t}$.
On a donc $P(X\geqslant 20)=\mathrm{e}^{-20\lambda}$.
$P(X\geqslant 20)=0,3 \iff \mathrm{e}^{-20\lambda}=0,3 \iff -20\lambda=\ln(0,3) \iff \lambda=-\dfrac{\ln(0,3)}{20}$

EXERCICE 2 — 6 points

QCM 7

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(\mathrm{e}^x-1)\left(1-x^2\right)\geqslant 0$ est :

A. $\boxed{]-\infty\,;\,-1]\cup[0\,;\,1]}$ **B.** $[-1\,;\,0]\cup[1\,;\,+\infty[$ **C.** $[0\,;\,1]$ **D.** $[-1\,;\,1]$

$(\mathrm{e}^x-1)\left(1-x^2\right)\geqslant 0 \iff (\mathrm{e}^x-1)(1-x)(1+x)\geqslant 0$
On établit un tableau de signes pour résoudre l'inéquation :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
e^x-1		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$(\mathrm{e}^x-1)\left(1-x^2\right)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

QCM 8

La fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et définie par $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ a pour dérivée :

A. $f'(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{4x}-1}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$ **B.** $f'(x) = \dfrac{-4\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$ **C.** $f'(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$ **D.** $\boxed{f'(x) = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}}$

$f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{2x}-1}{\mathrm{e}^{2x}+1}$ donc

$f'(x) = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)-\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)\times 2\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} = \dfrac{2\,\mathrm{e}^{2x}\left(\mathrm{e}^{2x}+1-\mathrm{e}^{2x}+1\right)}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2} = \dfrac{4\,\mathrm{e}^{2x}}{\left(\mathrm{e}^{2x}+1\right)^2}$

QCM 9

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}}$. Laquelle de ces propositions est exacte?

A. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ **B.** $\boxed{\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = \mathrm{e}^{-1}}$ **C.** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x<1}} f(x) = 0$ **D.** $\displaystyle\lim_{\substack{x\to1\\x>1}} f(x) = +\infty$

$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{x}{1-x} = -1$ (limite en l'infini de fonction rationnelle).
Donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{1-x}} = \mathrm{e}^{-1}$ (limite de fonction composée).

QCM 10

La suite (u_n) définie par $\left\{\begin{array}{lcr} u_{n+1} & = & \ln(1+u_n)\\ u_0 & = & 1\end{array}\right.$ est

A. croissante **B.** $\boxed{\text{décroissante}}$ **C.** convergente vers e **D.** divergente vers $-\infty$

- $u_1 = \ln(1+u_0) = \ln 2 < 1$ car $2 < \mathrm{e}$. On élimine la réponse A.
- Si (u_n) est convergente vers ℓ, alors on a l'égalité $\ell = \ln(1+\ell)$. Mais $\mathrm{e} \neq \ln(1+\mathrm{e})$, donc on peut éliminer la réponse C.
- On pet démontrer par récurrence que tous les termes u_n sont positifs donc on peut éliminer la réponse D.

QCM 11

On lance trois fois un dé équilibré, la probabilité d'obtenir exactement 2 fois le chiffre 6 est :

A. $\dfrac{1}{6^2}$ **B.** $\boxed{\dfrac{15}{6^3}}$ **C.** $\dfrac{5}{6^3}$ **D.** $\dfrac{2}{6^3}$

La variable aléatoire X qui donne le nombre de sorties du 6 lors de 3 lancers suit la loi binomiale de paramètres $n = 3$ et $p = \dfrac{1}{6}$.

$P(X=2) = \dbinom{3}{2}\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(1-\dfrac{1}{6}\right)^1 = 3\times\dfrac{1}{6^2}\times\dfrac{5}{6} = \dfrac{15}{6^3}$

QCM 12

L'équation $x^2\ln 2 = x^3\ln 3$ a pour solution :

A. $\left\{0\ ;\ \ln\dfrac{2}{3}\right\}$ **B.** $\boxed{\left\{0\ ;\ \dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right\}}$ **C.** $\left\{\dfrac{\ln 2}{\ln 3}\right\}$ **D.** $\{0\}$

$$x^2\ln 2 = x^3\ln 3 \iff x^2\ln 2 - x^3\ln 3 = 0 \iff x^2\ln 3\left(\frac{\ln 2}{\ln 3} - x\right) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

EXERCICE 3 8 points

PARTIE A

Dans un pays une maladie virale est transmise d'un être humain à un autre par un insecte infecté.
Un test a été mis en place pour le dépistage de ce virus. On sait que :
- La probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de 0,98
- La probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de 0,01.

On procède à un test de dépistage systématique dans la population de ce pays. Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :
- M l'évènement : « l'individu est atteint par le virus » ;
- T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif ».

On notera, $\overline{M}$ l'évènement contraire de M et $\overline{T}$ l'évènement contraire de T.
On notera p la proportion de personnes atteintes par le virus dans la population.

1. D'après le texte, on sait que $P_M(T) = 0{,}98$; $P_{\overline{M}}(T) = 0{,}01$; $P(M) = p$ donc $P(\overline{M}) = 1 - p$.
   D'après la formule des probabilités totales,
   $P(T) = P(M\cap T) + P(\overline{M}\cap T) = P(M)\times P_M(T) + P(\overline{M})\times P_{\overline{M}}(T) = p\times 0{,}98 + \left(1-p\right)\times 0{,}01$
   $= 0{,}97p + 0{,}01$.
2. La probabilité de M sachant T est : $P_T(M) = \dfrac{P(M\cap T)}{P(T)} = \dfrac{0{,}98p}{0{,}97p+0{,}01} = \dfrac{98p}{97p+1} = f(p)$.
3. Étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 1]$ revient à étudier le signe de f' sur cet intervalle.
   $f'(p) = \dfrac{98\times(97p+1) - 98p\times 97}{\left(97p+1\right)^2} = \dfrac{98\times 97p + 98 - 98p\times 97}{\left(97p+1\right)^2} = \dfrac{98}{\left(97p+1\right)^2} > 0$ sur $[0\ ;\ 1]$.
   La fonction f est donc strictement croissante sur $[0\ ;\ 1]$.
4. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte par le virus est supérieure ou égale à 0,95.
   Le test est donc fiable si $P_T(M) \geqslant 0{,}95$ autrement dit si $f(p) \geqslant 0{,}95$; on résout l'inéquation :
   $$\frac{98p}{97p+1} \geqslant 0{,}95 \iff \frac{98p}{97p+1} - \frac{95}{100} \geqslant 0 \iff \frac{98p\times 100 - 95\times(97p+1)}{97p+1} \geqslant 0$$
   $$\iff \frac{9\,800p - 9\,215p - 95}{97p+1} \geqslant 0 \iff \frac{585p-95}{97p+1} \geqslant 0 \iff 585p - 95 \geqslant 0$$
   $$\iff p \geqslant \frac{95}{585} \iff p \geqslant \frac{5\times 19}{5\times 117} \iff p \geqslant \frac{19}{117}$$
   Le test est donc fiable si la proportion p de malades est supérieure ou égale à $\dfrac{19}{117}$.

PARTIE B

Dans toute la partie B, un institut sanitaire estime que la probabilité qu'une personne soit atteinte par le virus est 0,15.
On choisit 100 individus au hasard dans cette population. Les tirages sont indépendants.

1. Soit X la variable aléatoire qui, aux 100 individus choisis, associe le nombre de personnes atteintes par le virus.

   On est dans le cas de répétition d'épreuves indépendantes qui ont deux issues ; donc la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}15$.

2. Dans l'échantillon précédent, on dénombre 20 personnes atteintes par le virus donc $f = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$.

   On établit un intervalle de fluctuation asymptotique au seuil de 95 % de la proportion de malades :

   $$I = \left[p - 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\ ;\ p + 1{,}96\frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}}\right]$$
   $$= \left[0{,}15 - 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}15\times 0{,}85}}{\sqrt{100}}\ ;\ 0{,}15 + 1{,}96\frac{\sqrt{0{,}15\times 0{,}85}}{\sqrt{100}}\right] \approx \left[0{,}15 - \frac{0{,}7}{10}\ ;\ 0{,}15 - \frac{0{,}7}{10}\right]$$
   $$\approx [0{,}08\ ;\ 0{,}22]$$

   La fréquence f dans l'échantillon appartient à l'intervalle I donc il n'y a pas de raison de remettre en question la proportion $p = 0{,}15$ de personnes atteintes du virus.

PARTIE C

Dans cette partie, on suppose p inconnue. On choisit 100 individus au hasard dans la population. Les tirages sont indépendants. On dénombre 20 personnes atteintes par le virus donc $f = \dfrac{20}{100} = 0{,}2$.

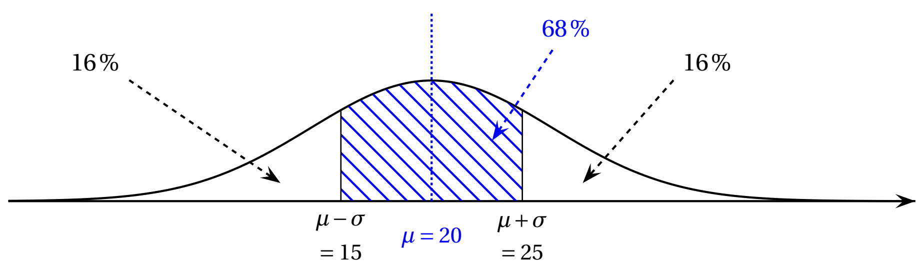
Un intervalle de confiance de p au seuil de 95 % est

$$\left[f - \frac{1}{\sqrt{n}}\ ;\ f + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] = \left[0{,}2 - \frac{1}{\sqrt{100}}\ ;\ 0{,}2 + \frac{1}{\sqrt{100}}\right] = [0{,}1\ ;\ 0{,}3]$$

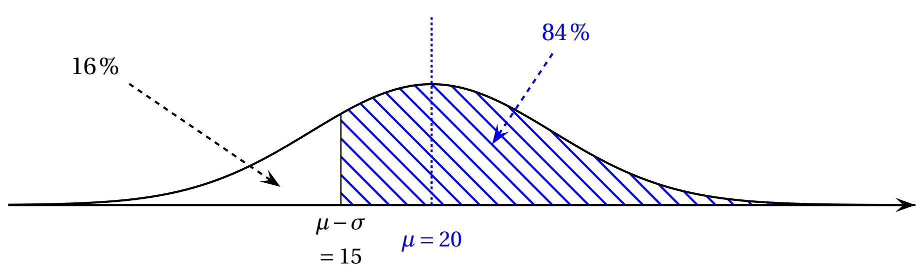
PARTIE D

Le temps d'incubation en heures du virus peut être modélisé par une variable aléatoire Y suivant une loi normale de moyenne 20 et d'écart-type 5.

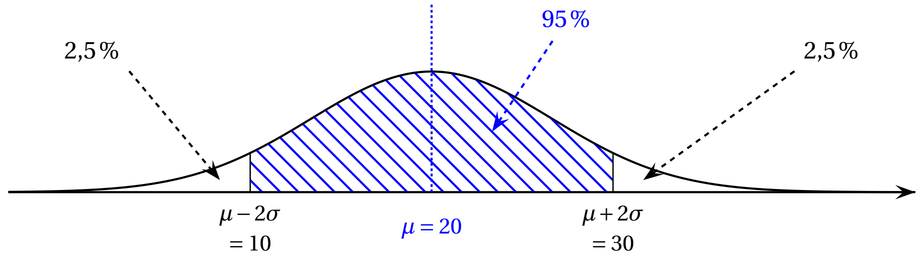
1. $P(15 < Y < 25) = P(20-5 < Y < 20+5) = P(\mu - \sigma < Y < \mu + \sigma \approx 0{,}68$ d'après le cours.



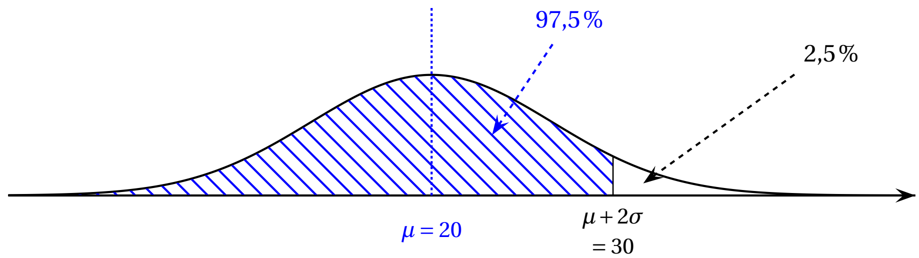
2. $P(Y \leqslant 15) = P(Y \geqslant 25) = \dfrac{1 - P(15 < Y < 25)}{2} \approx 0{,}16$ donc $P(Y > 15) = 1 - P(Y \leqslant 15) = 0{,}84$



3. D'après le cours, $P(\mu - 2\sigma < Y < \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$ donc $P(10 < Y < 30) \approx 0{,}95$.



$P(Y \leqslant 10) = P(Y \geqslant 30) = \dfrac{1 - P(10 < Y < 30)}{2} \approx 0{,}025$ donc $P(Y < 30) = 1 - P(Y \geqslant 30) = 0{,}975$



$P(Y < 30) = 0{,}975$ donc la probabilité que le temps d'incubation du virus soit inférieur à 30 heures est de 0,975 ; on peut également dire qu'il y a 97,5 % de chance que le virus ait un temps d'incubation inférieur à 30 heures.