# Corrigé du concours contrôleur des douanes session 2021

## BRANCHE DU CONTRÔLE DES OPÉRATIONS COMMERCIALES ET DE L'ADMINISTRATION GÉNÉRALE

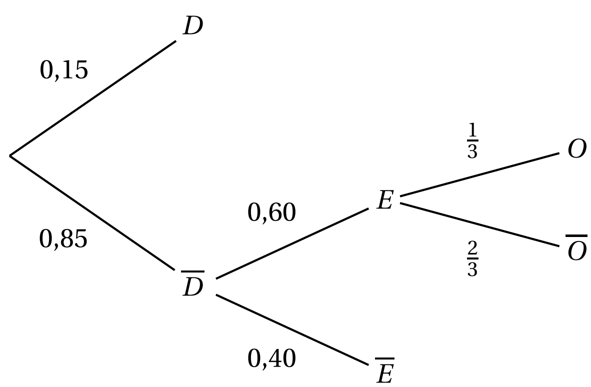
février 2021 Durée : 3 heures

**OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques**

### Exercice 1

- $D$ : « Le candidat est admis sur dossier »
- $E$ : « Le candidat passe et réussit l'épreuve écrite »
- $O$ : « Le candidat passe et réussit l'épreuve orale »
- $A$ : « Le candidat est admis »

**1.**




**2.**

- $p(E) = p\left(\overline{D}\right) \times p_{\overline{D}}(E) = 0,85 \times 0,6 = 0,51$.
- $p(O) = p(E) \times p_E(O) = 0,51 \times \dfrac{1}{3} = 0,17$.

**3.** On a $p(A) = p(D) + p(O) = 0,15 + 0,17 = 0,32$.

**4.** On a $\dfrac{p(D)}{p(A)} = \dfrac{0,15}{0,32} = \dfrac{15}{32}$.

### Exercice 2

On a $u_0 = 7$.

1. On a donc $u_1 = 0,8u_0 + 0,2 \times 63 = 5,6 + 12,6 = 18,2$. (millions)
2. Soit $u_n$ le nombre de clients l'année $2010 + n$.
   L'année suivante la société QSFT ne garde que $0,8u_n$ clients et en gagne de l'autre société $0,2\,(70 - u_n)$.
   On a donc $u_{n+1} = 0,8u_n + 0,2\,(70 - u_n) = 0,8u_n + 14 - 0,2u_n$, soit

$$u_{n+1} = 0,6u_n + 14.$$

**3.** On considère la suite $(v_n)$ définie, pour tout naturel $n$, par $v_n = u_n - 35$.
On a $v_{n+1} = u_{n+1} - 35 = 0,6u_n + 14 - 35 = 0,6u_n - 21 = 0,6(u_n - 35) = 0,6v_n$.
L'égalité vraie pour tout naturel $n$ par $v_{n+1} == 0,6v_n$ montre que la suite $(v_n)$ est géométrique de raison 0,6 et de premier terme $v_0 = u_0 - 35 = 7 - 35 = -28$.

**4.** On sait que quel que soit $n \in \mathbb{N}$,= $v_n = v_0 \times q^n$, $q$ étant la raison de la suite, soit :

$$v_n = -28 \times 0,6^n.$$

Or $v_n = u_n - 35 \iff u_n = v_n + 35 \iff u_n = 35 - 28 \times 0,6^n$.

**5.** Comme $0 < 0,6 < 1$ on sait que $\lim\limits_{n \to +\infty} 0,6^n = 0$ et ensuite $\lim\limits_{n \to +\infty} 28 \times 0,6^n = 0$, d'où :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 35.$$

Au bout d'un certain nombre d'années les deux sociétés auront sensiblement le même nombre de clients.

## Exercice 3

Soient $f$ et $g$ les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{array}{rcl} f(x) & = & \mathrm{e}^x \\ g(x) & = & 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \end{array}$$

On note $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ les courbes représentatives des fonctions $f$ et $g$ dans un repère orthogonal.

**1.** Les deux courbes ont un point commun si celui-ci a une abscisse telle ses images par $f$ et $g$ sont égales c'est-à-dire si $x$ est solution de l'équation :
$f(x) = g(x) \iff \mathrm{e}^x = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - 1$.
On pose $X = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ ; l'équation devient :
$X^2 = 2X - 1 \iff X^2 - 2X + 1 = 0 \iff (X-1)^2 = 0 \iff X = 1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ et par croissance de la fonction logarithme népérien :
$\ln 1 = \dfrac{x}{2} \iff 0 = \dfrac{x}{2} \iff 0 = x$ : les deux courbes ont un seul point commun d'abscisse 0 et d'ordonnée $f(0) = \mathrm{e}^0 = 2\mathrm{e}^{\frac{0}{2}} - 1 = 1 = 2 - 1 = 1$.
Tangentes au point (0 ; 1) à $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$ :
Ces tangentes ont comme coefficients directeurs respectifs les nombres dérivés $f'(0)$ et $g'(0)$.
$f$ et $g$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc
$f'(x) = \mathrm{e}^x$, d'où $f'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$ et
$g'(x) = 2 \times \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}$ d'où $g'(0) = \mathrm{e}^0 = 1$.
Les nombres dérivés sont égauX au point d'abscisse zéro et en ce point on a :
$M(x\,;\,y) \in \Delta \iff y - f(0) = f'(0)(x - 0 \iff y - 1 = 1 \times x \iff y = x + 1$.

**2.** Étude de la position relative de la courbe $\mathcal{C}_g$ et de la droite $\Delta$.
Soit $h$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = 2\mathrm{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2.$$

**a.** On sait que $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} = 0$ et comme $\lim\limits_{x \to -\infty} (-x - 2- = +\infty$ on a par somme de limites $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = +\infty$.

**b.** Dans l'écriture de $h(x)$ on factorise pour $x$ non nul, $x$ :

$h(x) = x\left(\dfrac{\text{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} - 1 - \dfrac{2}{x}\right)$.

Par puissance comparée on a $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \dfrac{\text{e}^{\frac{x}{2}}}{\frac{x}{2}} = +\infty$.

**c.** La fonction $h$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ et :

$h'(x) = 2\times\dfrac{1}{2}\text{e}^{\frac{x}{2}} - 1 = \text{e}^{\frac{x}{2}} - 1$.

- $\text{e}^{\frac{x}{2}} - 1 > 0 \iff \text{e}^{\frac{x}{2}} > 1 \Longrightarrow \frac{x}{2} > \ln 1 \iff x > 0$; $h'(x) > 0$ sur $]0\ ;\ +\infty[$;
- $\text{e}^{\frac{x}{2}} - 1 < 0 \iff \text{e}^{\frac{x}{2}} < 1 \Longrightarrow \frac{x}{2} < \ln 1 \iff x < 0$; $h'(x) < 0$ sur $]-\infty\ ;\ 0[$;
- $\text{e}^{\frac{x}{2}} - 1 = 0 \iff x = 0$.

**d.** D'après la question précédente $h$ est décroissante sur $]-\infty\ ;\ 0[$ et croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$.

On sait que $h(0) = 0$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $f$ | $+\infty$ | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**e.** Le tableau de variations montre que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $h(x) \geqslant 0 \iff 2\text{e}^{\frac{x}{2}} - x - 2 \geqslant 0 \iff 2\text{e}^{\frac{x}{2}} - x - -1 - 1 \geqslant 0 \iff 2\text{e}^{\frac{x}{2}} - 1 \geqslant x + 1$.

**f.** Géométriquement la dernière équation signifie que la courbe $\mathscr{C}_g$ est au dessus de la droite $\Delta$ l'égalité n'étant réalisé que pour $x = 0$.

**3.** Étude de la position relative de $\mathscr{C}_f$ et $\mathscr{C}_g$.

**a.** $\left(\text{e}^{\frac{x}{2}} - 1\right)^2 = \text{e}^x + 1 - 2\text{e}^{\frac{x}{2}}$.

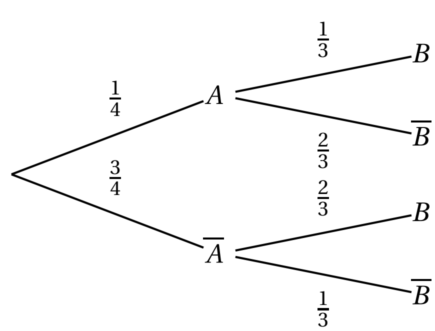
**b.** En reprenant la dernière expression qui est positive (carré), on a

$\text{e}^x + 1 - 2\text{e}^{\frac{x}{2}} \geqslant 0 \iff \text{e}^{\geqslant}2\text{e}^{\frac{x}{2}} - 1$ : géométriquement cette inéquation signifie que la courbe $\mathscr{C}_f$ est au-dessus de la courbe $\mathscr{C}_g$ l'égalité n'ayant lieu que pour $x = 0$.

## Exercice 4

**Dans cet exercice, les résultats seront donnés sous forme de fraction, sauf pour la question 4**

**1.**



2. D'après la loi des probabilités totales :
$p(B) = p(A \cap B) + p\left(\overline{A} \cap B\right) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{3} + \dfrac{3}{4} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{12} + \dfrac{6}{12} = \dfrac{7}{12}$.
3. Il faut calculer $p_B(A) = \dfrac{p(B \cap A)}{p(B)} = \dfrac{p(A \cap B)}{p(B)} = \dfrac{\frac{1}{12}}{\frac{7}{12}} = \dfrac{1}{7}$.
4. Les quatre parties sont indépendantes. À chacune d'elles la probabilité de gagner est égale à $p(B) = \dfrac{7}{12}$ : la variable $X$ égale au nombre de parties gagnés suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}\left(n = 4,\ p = \dfrac{7}{12}\right)$.
La probabilité de ne gagner aucune partie est égale à $\left(1 - \dfrac{7}{12}\right)^4 = \left(\dfrac{5}{12}\right)^4 = \dfrac{5^4}{12^4} = \dfrac{625}{20\,736} \approx 0,03$ soit à peu près 3 %.

## Exercice 5

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\ ;\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath},\ \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(1\,;0\,;2),\qquad \text{B}(1\,;1\,;4)\quad \text{et}\quad \text{C}(-1\ ;\ 1\ ;\ 1).$$

1. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}0\\1\\2\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}-2\\1\\-1\end{pmatrix}$ : ces vecteurs ne sont manifestement pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés.
2. On calcule $\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AB}} = 0 + 4 - 4 = 0$ :les vecteurs sont orthogonaux;
$\vec{n} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = -6 + 4 + 2 = 0$ :les vecteurs sont orthogonaux.
Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC) orthogonaux au vecteur $\vec{n}$ : celui-ci est donc un vecteur normal au plan (ABC) et l'on sait qu'une équation du plan (ABC) est :
$M(x\ ;\ y\ ,\ z) \in \text{(ABC)} \iff 3x + 4y - 2z + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Ainsi par exemple :
$\text{A}(1\ ;\ 0\ ;\ 2) \in \text{(ABC)} \iff 3 + 4 \times 0 - 2 \times 2 + d = 0 \iff -1 + d = 0 \iff d = 1$.

$$\text{Donc : } M(x\ ;\ y\ ,\ z) \in \text{(ABC)} \iff 3x + 4y - 2z + 1 = 0.$$