Corrigé du concours de contrôleur des douanes

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

21 mars 2016 Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au millième près.

Exercice 1

1. Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$u_{n+1} = \frac{1}{2-u_n} \text{ pour tout entier naturel } n.$$

   a. $u_1 = \dfrac{1}{2-u_0} = \dfrac{1}{2-0} = \dfrac{1}{2}$.
   $u_2 = \dfrac{1}{2-u_1} = \dfrac{1}{2-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\frac{3}{2}} = \dfrac{2}{3}$.
   $u_3 = \dfrac{1}{2-u_2} = \dfrac{1}{2-\frac{2}{3}} = \dfrac{1}{\frac{4}{3}} = \dfrac{3}{4}$.

   b. $w_n = \dfrac{n}{n+1}$:
   $w_0 = 0$;
   $w_1 = \dfrac{1}{2}$;
   $w_2 = \dfrac{2}{3}$;
   $w_3 = \dfrac{3}{4}$
   Les quatre premiers termes des suites (u_n) et (w_n) sont identiques.

   c. *Initialisation* : On a vu que $u_0 = w_0$.
   Hérédité : Supposons que pour $n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant 0$, on ait $u_n = w_n$, alors
   $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-u_n}$ et $u_n = w_n = \dfrac{n}{n+1}$ donc
   $u_{n+1} = \dfrac{1}{2-\dfrac{n}{n+1}} = \dfrac{n+1}{2n+2-n} = \dfrac{n+1}{n+2} = w_{n+1}$: l'égalité est vraie au rang $n+1$.
   Conclusion : l'égalité est vraie au rang 0 et si elle est vraie au rang n elle l'est aussi au rang $n+1$: d'après le principe de récurrence $u_n = w_n$ quel que soit $n \in \mathbb{N}$.

2. Soit (v_n) la suite de terme général v_n définie par $v_n = \ln\left(\dfrac{n}{n+1}\right)$ où ln désigne la fonction logarithme népérien.

   a. $v_1 + v_2 + v_3 = \ln\dfrac{1}{2} + \ln\dfrac{2}{3} + \ln\dfrac{3}{4} = \ln\left[\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{3}\times\dfrac{3}{4}\right] = \ln\dfrac{1}{4} = -\ln 4$.

   b. Soit S_n la somme définie pour tout entier naturel non nul n par : $S_n = \displaystyle\sum_{1}^{n} v_n$.

i. Pour $n \geqslant 1, S_n = \sum_1^n v_n = \sum_1^n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = \ln \frac{1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times n}{2 \times 3 \times 4 \times \ldots \times (n+1)} = \ln\left(\frac{1}{n+1}\right) = -\ln(n+1)$.

ii. Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} (n+1) = +\infty$, $\lim\limits_{n \to +\infty} \ln(n+1) = +\infty$ et enfin $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = -\infty$.

Exercice 2

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\, \vec{\imath},\, \vec{\jmath},\, \vec{k}\right)$.
Soit (P) le plan d'équation : $3x + y - z - 1 = 0$ et (D) la droite dont une représentation paramétrique est :

$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -t+1 \\ y & = & 2t \\ z & = & -t+2 \end{array}\right. ,$$

où t désigne un nombre réel.

1. **a.** On a $M(x\,;\, y\,;\, z) \in (P) \iff 3x + y - z - 1 = 0$, donc :
$\text{C}(1\,;\,3\,;\,2) \in (P) \iff 3 \times 1 + 3 - 2 - 1 = 0 \iff 3 = 0$: l'égalité est fausse donc C $\notin (P)$.

b. La droite (D) est incluse dans le plan (P) si tout point de (D) appartient à (P).
Or $M(x\,;\, y\,;\, z) \in (D) \iff \left\{\begin{array}{l c l} x & = & -t+1 \\ y & = & 2t \\ z & = & -t+2 \end{array}\right.$ et en remplaçant ces coordonnées dans l'équation du plan :
$M(x\,;\, y\,;\, z) \in (P) \iff 3(-t+1) + 2t - (-t+2) - 1 = 0 \iff -3t + 3 + 2t + t - 2 - 1 = 0 \iff 0 = 0$: l'égalité est vraie donc la droite (D) est incluse dans le plan (P).

2. Soit (Q) le plan passant par le point C et orthogonal à la droite (D).

a. La droite (D) a pour vecteur directeur le vecteur $\vec{d}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Si (D) est orthogonale à (Q) le vecteur $\vec{d}$ est normal au plan (Q) et l'on sait alors que :
$M(x\,;\, y\,;\, z) \in (Q) \iff -1x + 2y - 1 + d = 0$, avec $d \in \mathbb{R}$.
Or $\text{C}(1\,;\,3\,;\,2) \in (Q) \iff -1 + 2 \times 3 - 2 + d = 0 \iff 3 + d = 0 \iff d = -3$.
Donc $M(x\,;\, y\,;\, z) \in (Q) \iff -1x + 2y - z - 3 = 0 \iff x - 2y + z + 3 = 0$.

b. Les coordonnées de I vérifient les équations de (D) et l'équation de (Q) donc vérifient le système :
$$\left\{\begin{array}{l c l} x & = & -t+1 \\ y & = & 2t \\ z & = & -t+2 \\ x - 2y + z + 3 & = & 0 \end{array}\right.$$
En remplaçant x, y z par leur valeur en fonction de t dans la dernière équation, on obtient :
$-t + 1 - 2(2t) + (-t+2) + 3 = 0 \iff -t + 1 - 4t - t + 2 + 3 = 0 \iff 6 = 6t \iff 1 = t$
En reportant cette valeur dans les trois premières équations, on a $x = 0$, $y = 2$ et $z = 1$.
$\text{I}(0; 2; 1)$.

c. On a $\overrightarrow{\text{CI}}\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$, donc $\text{CI}^2 = \left\|\overrightarrow{\text{CI}}\right\|^2 = (-1)^2+1^2+1^2 = 3$, d'où $\left\|\overrightarrow{\text{CI}}\right\| = \text{CI} = \sqrt{3}$.

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$f(x) = x + \frac{\ln x}{x}$$

et la fonction g définie sur $]0~;~+\infty[$ par

$$g(x) = x^2 + 1 - \ln x.$$

On note $(\mathscr{C})$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}~;~\vec{\imath},~\vec{\jmath}\right)$.

1. **a.** La fonction g somme de fonctions dérivables sur $]0~;~+\infty[$ est dérivable sur cet intervalle où :
$g'(x) = 2x - \dfrac{1}{x} = \dfrac{2x^2-1}{x}$
Comme $x > 0$, le signe de $g'(x)$ est le signe du numérateur $2x^2-1$.
$2x^2-1 = 0 \iff 2x^2 = 1 \iff x^2 = \dfrac{1}{2} \iff x = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ou $x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
On sait que le trinôme $2x^2-1$ est positif sauf entre les racines, donc ici sur l'intervalle $\left]0~;~\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$ où $g'(x) < 0$.
Conclusion :
    - g est décroissante sur $\left]0~;~\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right[$
    - g est croissante sur $\left]\dfrac{\sqrt{2}}{2}~;~+\infty\right[$

   On a $\lim\limits_{x\to 0} g(x) = -(-\infty) = +\infty$;
$g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{2}{4} + 1 - \ln\dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{2}\ln 2$;
En écrivant $g(x) = x\left(x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x}\right)$ et comme
$\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x} = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{\ln x}{x} == \infty$ et enfin $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$.

   b. Le minimum de la fonction g est $g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) = \dfrac{3-\ln 2}{2} \approx 1,15 >$, la fonction g est positive sur $]0~;~+\infty[$.

2. **a.** On a $\lim\limits_{x\to 0} \ln x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0} x = 0$, donc $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln x}{x} = -\infty. =$

   b. On sait (puissances comparées) que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$, et comme $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

D'autre part soit d la fonction définie sur $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$d(x) = f(x) - x = \frac{\ln x}{x}.$$

On a vu que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ ce qui signifie géométriquement que la droite (D) est asymptote à $(\mathscr{C})$ au voisinage de plus l'infini.

c. f est une somme de quotients de fonctions dérivables sur $]0\ ;\ +\infty[$ et sur cet intervalle elle est dérivable avec :
$f'(x) = 1 + \dfrac{\frac{1}{x} \times x - 1 \times \ln x}{x^2} = 1 + \dfrac{1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = \dfrac{g(x)}{x^2}$

d. Comme $x^2 >$ pour $x \in]0\ ;\ +\infty[$, le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ et on a vu que sur le même intervalle $g(x) > 0$.

Conclusion la fonction est strictement croissante de moins l'infini à plus l'infini.

e. Il faut trouver $\mathrm{A}\left(x_\mathrm{A}\ ;\ f\left(x_\mathrm{A}\right)\right)$ tel que $f'\left(x_\mathrm{A}\right) = 1$ (coefficient directeur de (D), soit puisque $f'(x) = \dfrac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2}$, le réel solution de l'équation
$\dfrac{x^2 + 1 - \ln x}{x^2} = 1 \iff x^2 + 1 - \ln x = x^2 \iff 1 - \ln x = 0 \iff 1 = \ln x \iff x = \mathrm{e}.$
En $\mathrm{A}\left(\mathrm{e}\ ;\ \mathrm{e} + \mathrm{e}^1\right)$ la tangente à $(\mathscr{C})$ est parallèle à (D).

Exercice 4

Une urne contient cinq boules indiscernables au toucher : deux vertes et trois rouges.

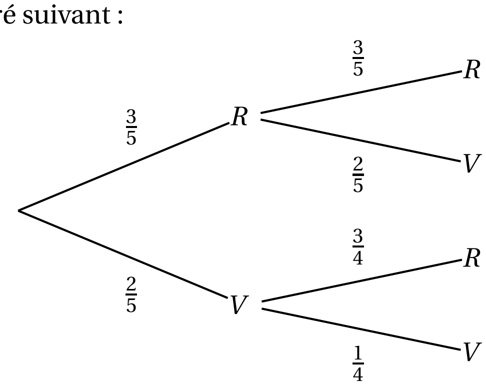
1. On extrait simultanément et au hasard deux boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de boules vertes figurant dans le tirage.

a. En numérotant les boules V_1, V_2, R_1, R_2 et R_3 on peut avoir les tirages suivants :
$V_1V_1, V_1R_1, V_1R_2, V_1R_3, V_2R_1, V_2R_2, V_2R_3, R_1R_2, R_1R_3$ et R_2R_3.
Les trois derniers tirages n'ont pas de boules vertes, donc $p(X = 0) = \dfrac{3}{10}$.
On a $p(X = 1) = \dfrac{6}{10}$ et $p(X = 2) = \dfrac{1}{10}$.

b. $E(X) = 0 \times \dfrac{3}{10} + 1 \times \dfrac{6}{10} + 2 \times \dfrac{1}{10} = \dfrac{6}{10} + \dfrac{2}{10} = \dfrac{8}{10} = 0,8.$

c. On a $p(A) = p(X = 0) + p(X = 2) = \dfrac{3}{10} + \dfrac{1}{10} = \dfrac{4}{10} = 0,4.$

2. **a.** Avec l'arbre pondéré suivant :



On a $p(B) = \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{3}{10} = 0,3$;

$p(C) = p(R) \times p_R(C) + p(V) \times p_V(R) = \dfrac{3}{5} \times \dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{5} \times \dfrac{3}{4} = \dfrac{6}{25} + \dfrac{3}{10} = \dfrac{12}{50} + \dfrac{15}{50} = \dfrac{27}{50} = \dfrac{54}{100} = 0,54$.

b. Il faut calculer $p_C(B) = \dfrac{p(C \cap B)}{p(C)} = \dfrac{\frac{2}{5} \times \frac{3}{4}}{\frac{27}{50}} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{27}{50}} = \dfrac{15}{27}$.