∽ Corrigé du concours de contrôleur des douanes 14 mars 2011 ∾

Branche du contrôle des opérations commerciales et de l'administration générale

Durée : 3 heures

OPTION A : Résolution d'un ou plusieurs problèmes de mathématiques

Remarque préliminaire :
– Sauf précision contraire figurant dans un énoncé, lorsque des calculs sont demandés, les résultats seront donnés sous forme décimale au centième près.
– Chaque réponse doit être précédée du numéro de la question à laquelle elle se rapporte, sur la copie et les intercalaires destinés à cet effet.
Aucune réponse ne doit être inscrite sur le sujet.

Exercice 1

On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = 1 - \mathrm{e}^{-3x} \quad \text{pour tout } x \text{ réel.}$$

1. a. On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x = -\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$.
On sait que $\lim\limits_{x\to-\infty} -3x = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-3x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

b. f composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet intervalle et $f'(x) - 3 \times (-\mathrm{e}^{-x}) = 3\mathrm{e}^{-x}$.
Or on sait que quel que soit $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{e}^{-x} > 0$, donc $f'(x) > 0$: le fonction f est strictement croissante de $-\infty$ à 1.

2. On note g la fonction définie par $g(x) = f(x) - x$ pour tout x réel.

a. On a sur $\mathbb{R}$, $g'(x) = 3\mathrm{e}^{-3x} - 1$.
$g'(x) < 0 \iff 3\mathrm{e}^{-3x} - 1 < 0 \iff 3\mathrm{e}^{-3x} < 1 \iff \mathrm{e}^{-3x} < \dfrac{1}{3} \iff -3x < \ln\frac{1}{3}$par croissance de la fonction logarithme népérien, $\iff -x < -\dfrac{\ln 3}{3} \iff \dfrac{\ln 3}{3} < x$.
Conclusion $g'(x) < 0$ sur $\left]\dfrac{\ln 3}{3}\,;\,+\infty\right[$.
On aurait de même $g'(x) > 0$ sur $]-\infty\,;\,\dfrac{\ln 3}{3}[$ et $g'\left(\dfrac{\ln 3}{3}\right) = 0$.

b. $g(0) = 1 - \mathrm{e}^0 - 0 = 0$;
$g(1) = 1 - 3\mathrm{e}^{-3} - 1 = -3\mathrm{e}^{-3} \approx -0,05$;
$g\left(\dfrac{\ln 3}{3}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\ln 3} - \dfrac{\ln 3}{3} = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{\ln 3}} - \dfrac{\ln 3}{3} = 1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{\ln 3}{3} = \dfrac{2 - \ln 3}{3} \approx 0,30 \approx -0,136.$

x	$-\infty$		0		$\frac{\ln 3}{3}$		1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
g			0		$\frac{2-\ln 3}{3}$		$-3\mathrm{e}^{-3}$		

c. Sur l'intervalle $\left[\dfrac{\ln 2}{3}\ ;\ 1\right]$ la fonction g est continue car dérivable et strictement décroissante de $g\left(\dfrac{\ln 3}{3}\right) = \dfrac{2-\ln 3}{3} > 0$ à $g(1) = -\mathrm{e}^{-3} < 0$: d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel unique $\alpha \in \left]\dfrac{\ln 3}{3}\ ;\ 1\right[$ tel que $g(\alpha) = 0$ soit $0,366 < \alpha < 1$.

La calculatrice donne plus précisément $0,94 < \alpha < 0,95$. ($g(0,94) \approx 0,0004$ et $g(0,95) \approx -0,008$.)

3. On a $M(x\ ;\ y) \in (T) \iff y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
Avec $f(0) = 1-1 = 0$ et $f'(0) = 3\mathrm{e}^0 = 3$, on obtient :
$M(x\ ;\ y) \in (T) \iff y - 0 = 3(x-0) \iff y = 3x$.

Exercice 2

On considère une suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par

$$u_0 = 6 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{1}{3}u_n + 2.$$

On pose $v_n = u_n - 3$.

1. **a.** Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = u_{n+} - 3 = \dfrac{1}{3}u_n + 2 - 3 = \dfrac{1}{3}u_n - 1 = \dfrac{1}{3}(u_n - 3) = \dfrac{1}{3}v_n$.

Cette égalité montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$ et de premier terme $v_0 = u_0 - 3 = 6 - 3 = 3$.

b. On sait que pour $n \in \mathbb{N}$, $v_n = 3 \times \left(\dfrac{1}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

Or $v_n = u_n - 3 \iff u_n = v_n + 3 = 3 + \dfrac{1}{3^{n-1}}$.

c. Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{3^{n-1}} = 0$, on a $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 3$.

2. On constate que, pour tout n appartenant à $\mathbb{N}$, v_n est strictement positif et on pose $w_n = \ln(v_n)$.

Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = \ln(v_{n+1}) = \ln \dfrac{1}{3^n} = \ln\left[\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3^{n-1}}\right) = \ln\dfrac{1}{3} + \ln\dfrac{1}{3^{n-1}} = \ln\dfrac{1}{3^{n-1}} - \ln 3 = \ln v_n - \ln 3 = w_n - \ln 3$.

L'égalité vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_n + 1 = w_n - \ln 3$ démontre que la suite (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\ln 3$, de premier terme $w_0 = \ln v_0 = \ln 3$.

3. **a.** On a pour $n \in \mathbb{N}$, $_n = \ln 3 + -n\ln 3 = (1-n)\ln 3$.

b. On a $-\ln\left(27^3\right) - \ln(9) = -\ln\left(\left(3^3\right)^3\right) - \ln 3^2 = -\ln 3^9 - \ln 3^2 = -\ln 3^{9+2} = -\ln 3^{11}$.

Donc $w_n = -\ln\left(27^3\right) - \ln(9) \iff (1-n)\ln 3 = -\ln 3^{11} \iff \ln 3^{1-n} \iff$
$\ln\dfrac{1}{3^{11}} = \ln\dfrac{1}{3^{n-1}}$ soit d'après la croissance de la fonction exponentielle :
$n - 1 = 11 \iff n = 12$.

Exercice 3

1. Quelle est la probabilité des évènements A, B et C suivants?
A : « interroger une personne ayant un billet gagnant 30 euros ».

Les billets numérotés : 20, 120, 220, 65, 165 gagnent 30 €. Donc $p(A) = \dfrac{5}{250} = \dfrac{20}{1\,000} = 0,02$.

B : «interroger une personne ayant un billet gagnant ».

Rapportent 10€ les billets numérotés 3, 13, 23, 33, 43, 53, 63, 73, 83, 93, 103, 113, 123, 133, 143, 153, 163, 173, 183, 193, 203, 213, 223, 233, 243, soit 25 billets. Donc $p(B) = \dfrac{5+25}{250} = \dfrac{30}{250} = \dfrac{3}{25} = \dfrac{2}{100} = 0,12$.

C : «interroger une personne ayant reçu 30 euros sachant que cette personne avait un billet gagnant ».

Sur les 30 personnes ayant gagné 5 ont gagné 30 € ; donc $p(C) = \dfrac{5}{30} = \dfrac{1}{6}$.

2. À chaque personne ayant acheté un billet, on associe son gain X, la différence entre ce qu'elle reçoit et les 2 euros versés pour avoir un billet.

a. On a $p(X = 30-2) = \dfrac{5}{250} = 0,02$;
$p(X = 10-2) = \dfrac{25}{250} = \dfrac{1}{10} = 0,1$;
$p(X = 0-2) = \dfrac{220}{250} = \dfrac{22}{25} = \dfrac{88}{100} = 0,88$.

b. On a donc $E(X) = 28 \times 0,02 + 8 \times 0,1 - 2 \times 0,88 = 0,56 + 0,8 - 1,76 = 1,36 - 1,76 = -0,40$.

Le « gain » (ici la perte) moyen par joueur est donc de 40 centimes d'euro.

Exercice 4

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O} ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points

$$\text{A}(2 ; -3 ; 5), \quad \text{B}(4 ; 3 ; 7) \quad \text{et} \quad \text{C}(1 ; -6 ; 4).$$

1. On a $\overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 4-2 \\ 3-(-3) \\ 7-5 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$;

$\overrightarrow{\text{AC}} \begin{pmatrix} 1-2 \\ -6-(-3) \\ 4-5 \end{pmatrix}$, soit $\overrightarrow{\text{AB}} \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2. Les vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ sont ils colinéaires ? On a $2 = -2 \times (-1)$, $6 = -2 \times (-3)$, $2 = -2 \times (-1)$, donc $\overrightarrow{\text{AB}} = -2\overrightarrow{\text{AC}}$: les vecteurs sont colinéaires.

3. On a $\text{AB}^2 = 2^2 + 6^2 + 2^2 = 4 + 36 + 4 = 44$, d'où $\text{AB} = \sqrt{44} = \sqrt{4 \times 11} = 2\sqrt{11}$;
$\text{AC} = (-1)^2 + (-3)^2 + (-1)^2 = 1 + 9 + 1 = 11$, donc $\text{AC} = \sqrt{11}$.

Exercice 5

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{2x}{x^2+4}.$$

1. $0 \leqslant x \leqslant 1 \Longrightarrow 0 \leqslant x^2 \leqslant 1 \Longrightarrow 0+4 \leqslant x^2+4 \leqslant 5 \Longrightarrow \dfrac{1}{5} \leqslant \dfrac{1}{x^2+4} \leqslant \dfrac{1}{4} \Longrightarrow \dfrac{2}{5} \leqslant \dfrac{2}{x^2+4} \leqslant \dfrac{2}{4}$ soit finalement
$$0,4 \leqslant \frac{2}{x^2+4} \leqslant 0,5.$$
La fonction f est positive sur $[0~;~1]$.

2. Soit $u(x) = x^2+4$, alors $u'(x) = 2x$ et on peut écrire $f'(x) = \dfrac{u'(x)}{u(x)}$.
On reconnait la dérivée de la fonction $x \longmapsto F(x) = \ln\left(x^2+4\right)$ qui est une primitive de la fonction f.

3. D'après la question 1 la fonction f est positive sur $[0;~1]$, donc l'aire cherchée $\mathscr{A}$ est égale à l'intégrale entre 0 et 1 de la fonction f soit :
$\mathscr{A} = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = \ln\left(1^2+4\right) - \ln\left(0^2+4\right) = \ln 5 - \ln 4 = \ln \dfrac{5}{4} \approx$ 0,223 144.
J'unité d'aire valant $2 \times 2 = 4$ cm^2, on a $\mathscr{A} \approx 0,893$ cm^2.