Corrigé du Brevet de Technicien Supérieur Polynésie
16 mai 2025 - Comptabilité et gestion

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES 2 heures

Exercice n° 1 **10 points**

On s'intéresse à quelques données sur le changement climatique et ses conséquences dans le monde.

Partie A

Le tableau ci-dessous donne l'augmentation du niveau moyen des océans en prenant pour référence le niveau moyen lors de l'année 1995.

Année	1995	2000	2005	2010	2015	2020
Rang de l'année x_i	0	5	10	15	20	25
Augmentation du niveau moyen des océans y_i (en centimètre)	0	1,7	3,1	4,8	6,8	8,7

(source : E.U. Copernicus Marine Service Information)

1. Avec la calculatrice, on donne l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés : $y = 0{,}346x - 0{,}138$.
2. Dans cette question, on décide d'ajuster le nuage de points de cette série statistique $(x_i\ ;\ y_i)$ par la droite d'équation : $y = 0{,}35x - 0{,}14$.
   a. L'année 2025 correspond au rang $x = 30$; on a alors : $y = 0{,}35 \times 30 - 0{,}14 = 10{,}36$.
   Pour l'année 2025 l'augmentation du niveau moyen des océans par rapport à son niveau moyen de 1995 peut être estimée à 10,36 cm.
   b. L'année à partir de laquelle l'augmentation du niveau moyen des océans dépassera 20 centimètres par rapport à son niveau moyen de 1995 correspond au plus petit entier x tel que $y > 20$. On résout cette inéquation.
   $y > 20 \iff 0{,}35x - 0{,}14 > 20 \iff 0{,}35x > 20{,}14 \iff x > \dfrac{20{,}14}{0{,}35}$
   $\dfrac{20{,}14}{0{,}35} \approx 57{,}5$, donc on prendra $x = 58$ qui correspond à l'année 2053.

Partie B

Le tableau ci-dessous, extrait d'une feuille de calcul d'un tableur, donne la superficie mensuelle moyenne des glaces arctiques en septembre sur la période de 1980 à 2020. La plage de cellules C3 à F3 est au format pourcentage à une décimale.

	A	B	C	D	E	F
1	Année	1980	1990	2000	2010	2020
2	Superficie (en millions de km^2)	7,7	6,4	6,2	4,9	4
3	Taux d'évolution par rapport à l'année 1980 (en %)					

(*source : National Snow and Ice Data Center*)

1. Une formule à saisir en C3 et qui permet, par recopie vers la droite, de calculer les taux d'évolutions successifs des superficies par rapport à l'année 1980 est :

```
= (C2 - $B$2) / $B$2
```

2. **a.** $\dfrac{4-7{,}7}{7{,}7} \times 100 \approx 48{,}052$ donc, sur la période 1980 à 2020, la superficie moyenne des glaces arctiques en septembre a diminué d'environ 48,1 %.

   b. On appelle p le taux d'évolution annuel moyen. On a :

$$\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^4 = 1+\dfrac{48{,}1}{100} \text{ donc } 1+\dfrac{p}{100} = \left(1+\dfrac{48{,}1}{100}\right)^{\frac{1}{4}}$$

$$\dfrac{p}{100} = \left(1+\dfrac{48{,}1}{100}\right)^{\frac{1}{4}} - 1$$

$$p = 100\left(\left(1+\dfrac{48{,}1}{100}\right)^{\frac{1}{4}} - 1\right)$$

$$p \approx 10{,}3$$

   Donc le taux d'évolution annuel moyen est de 10,3 %.

Partie C

On suppose dans cette partie qu'à partir de l'année 2020, la superficie moyenne des glaces arctiques en septembre diminue tous les ans de 1,6%. La suite (u_n) modélise la superficie moyenne, exprimée en million de km^2, des glaces arctiques en septembre pour l'année $(2020+n)$. On a ainsi : $u_0 = 4{,}0$.

1. $u_1 = u_0 - u_0 \times \dfrac{1{,}6}{100} = 4 - 4 \times \dfrac{1{,}6}{100} \approx 3{,}94$

   $u_2 = u_1 - u_1 \times \dfrac{1{,}6}{100} = 3{,}94 - 3{,}94 \times \dfrac{1{,}6}{100} \approx 3{,}88$

2. Diminuer de 1,6%, c'est multiplier par $1 - \dfrac{1{,}6}{100}$ soit 0,984.

   Donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 0{,}984$ et de premier terme $u_0 = 4$.

3. On en déduit que, pour tout n, on a : $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times 0{,}984^n$.

4. Septembre 2025 correspond à $n = 5$, et $u_5 = 4 \times 0{,}984^5 \approx 3{,}69$.

   Donc la superficie moyenne des glaces arctiques en septembre 2025 peut être estimée à 3,69 km^2.

5. La superficie moyenne des glaces arctiques en septembre passera pour la première fois en dessous de 2 millions de km^2 quand on aura $u_n < 2$. On résout cette inéquation.

$$u_n < 2 \iff 4 \times 0{,}984^n < 2 \iff 0{,}984^n < \dfrac{2}{4} \iff \ln\left(0{,}984^n\right) < \ln(0{,}5)$$

$$\iff n \times \ln(0{,}984) < \ln(0{,}5) \iff n > \dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}984)}$$

   $\dfrac{\ln(0{,}5)}{\ln(0{,}984)} \approx 42{,}97$ donc on prendra $n = 43$ qui correspond à septembre 2063.

Exercice n° 2 **10 points**

Un institut a réalisé un sondage sur l'intérêt des Français pour les Jeux Olympiques qui ont eu lieu à Paris en août 2024.

Partie A

Ce sondage a donné les résultats suivants :

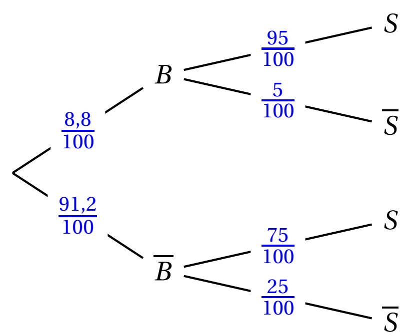
- 8,8 % des sondés ont acheté des places pour ces Jeux Olympiques.
- Parmi les sondés ayant acheté des places pour ces Jeux Olympiques, 95 % ont déclaré avoir également suivi ces Jeux Olympiques à la télévision.
- Parmi les sondés n'ayant pas acheté des places pour ces Jeux Olympiques, 75 % ont déclaré avoir également suivi ces Jeux Olympiques à la télévision.

On choisit au hasard une personne interrogée lors de ce sondage. Toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies.
On s'intéresse alors aux évènements suivants :

- B : « la personne sondée a acheté des places pour ces Jeux Olympiques ».
- S : « la personne sondée a suivi ces Jeux Olympiques à la télévision ».

On note respectivement $\overline{B}$ et $\overline{S}$ les évènements contraires de B et S.

1. On complète l'arbre pondéré suivant.



2. La probabilité que la personne sondée ait acheté des places et ait également suivi ces Jeux Olympiques à la télévision est : $P(B \cap S) = \dfrac{8,8}{100} \times \dfrac{95}{100} = 0,0836$.
3. D'après la formule des probabilités totales;
$P(S) = P(B \cap S) + P\left(\overline{B} \cap S\right) = 0,0836 + \dfrac{91,2}{100} \times \dfrac{75}{100} = 0,0836 + 0,6840 = 0,7676$.
4. Le responsable du sondage affirme que, parmi les personnes n'ayant pas suivi ces Jeux Olympiques à la télévision, moins de 2 % ont déclaré avoir acheté des places.
On cherche la probabilité des personnes ayant déclaré avoir acheté un billet sachant qu'elles n'ont pas suivi les jeux à la télévision, c'est-à-dire $P_{\overline{S}}(B)$.
$P_{\overline{S}}(B) = \dfrac{P\left(B \cap \overline{S}\right)}{P\left(\overline{S}\right)} = \dfrac{0,088 \times 0,05}{1 - 0,7676} = \dfrac{0,0044}{0,2324} \approx 0,0189 < 0,02$
Le responsable du sondage a raison.

Partie B

On choisit au hasard 200 personnes interrogées lors de ce sondage. Le nombre de personnes interrogées est assez grand pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise. On considère la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 200 personnes interrogées, associe le nombre de personnes disant avoir suivi ces Jeux Olympiques à la télévision. On admet que la probabilité pour qu'une personne interrogée dise avoir suivi ces Jeux Olympiques à la télévision est égale à 0,77.

1. On exécute 200 fois une expérience élémentaire qui n'a que deux issues : le succès avec une probabilité $p = 0{,}77$, et l'échec.

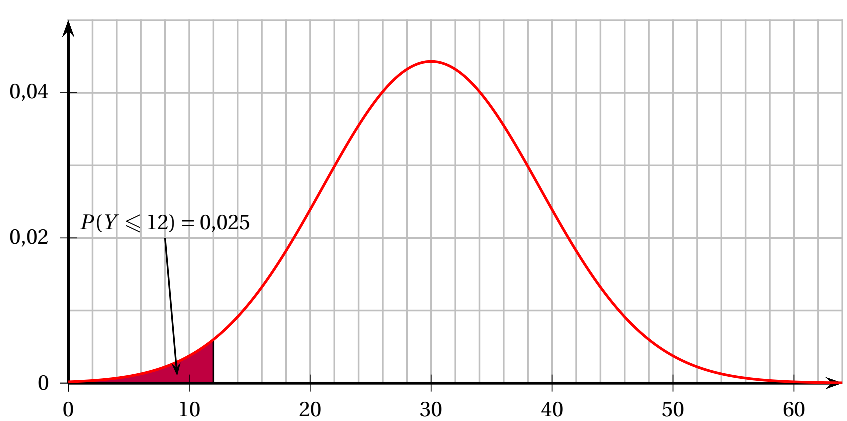
   De plus, le nombre de personnes interrogées est assez grand pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

   Donc la variable aléatoire X qui, à tout prélèvement de 200 personnes interrogées, associe le nombre de personnes disant avoir suivi ces Jeux Olympiques à la télévision, suit une loi binomiale de paramètres $n = 200$ et $p = 0{,}77$.
2. L'espérance de la variable aléatoire X est $E(X) = np = 200 \times 0{,}77 = 154$.

   Cela veut dire que dans chaque lot de 200 personnes, il y en a en moyenne 154 qui disent avoir suivi ces Jeux Olympiques à la télévision.
3. La probabilité pour que, dans un tel prélèvement, exactement 155 personnes disent avoir suivi ces Jeux Olympiques à la télévision est : $P(X = 155) \approx 0{,}066$.
4. $P(X \leqslant 149) \approx 0{,}223$
5. La probabilité pour que, dans un tel prélèvement, au moins 150 personnes disent avoir suivi ces Jeux olympiques à la télévision est $P(X \geqslant 150) = 1 - P(X \leqslant 149) \approx 0{,}777$.

Partie C

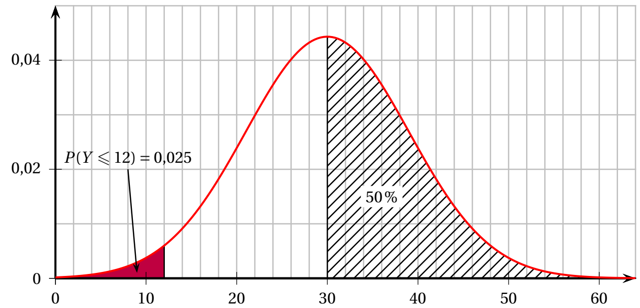
Le sondage s'intéressait également au temps passé par les sondés à suivre ces Jeux Olympiques sur les divers médias possibles (télévision, internet, radio...). On note Y la variable aléatoire qui modélise le temps passé par chaque personne interrogée à suivre ainsi ces Jeux olympiques. Y est exprimée en heure. Selon les résultats de ce sondage, on admet que Y suit une loi normale d'espérance 30 dont on donne ci-dessous la courbe représentative de sa fonction densité. On sait de plus que $P(Y \leqslant 12) = 0{,}025$.



1. La variable aléatoire Y suit une loi normale d'espérance 30, donc la droite d'équation $x = 30$ est axe de symétrie de la représentation graphique de la fonction densité.

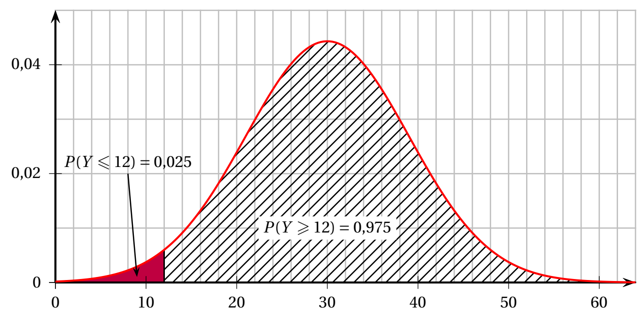
On en déduit que $P(Y \geqslant 30) = P(Y \leqslant 30) = 0{,}5$.

Le pourcentage de personnes interrogées à avoir passé plus de 30 heures à suivre ainsi ces Jeux Olympiques est donc de 50 %.



2. On cherche la probabilité $P(Y \geqslant 12)$.

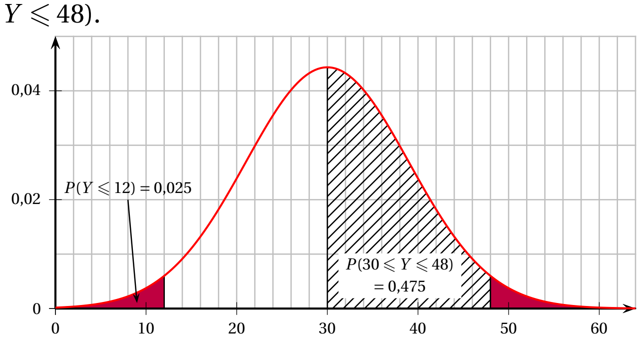
$$\begin{aligned}P(Y \geqslant 12) &= 1 - P(Y \leqslant 12)\\ &= 1 - 0{,}025\\ &= 0{,}975\end{aligned}$$



3. On cherche la probabilité $P(30 \leqslant Y \leqslant 48)$.

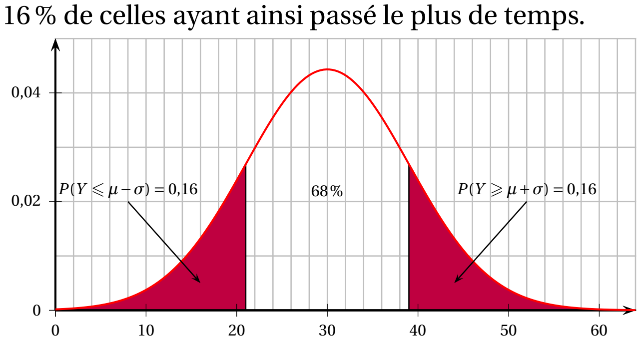
Pour des raisons de symétrie :
$P(Y \geqslant 30+18) = P(Y \leqslant 30-18)$
donc $P(Y \geqslant 48) = P(Y \leqslant 12)$,
et donc $P(Y \geqslant 48) = 0{,}025$.

$P(30 \leqslant Y \leqslant 48)$
$= P(Y \geqslant 30) - P(Y \geqslant 48)$
$= 0{,}5 - 0{,}025 = 0{,}475$



4. On cherche le temps qu'une personne interrogée doit avoir passé à suivre ces Jeux Olympiques pour faire partie des 16 % de celles ayant ainsi passé le plus de temps.

On sait que si la variable aléatoire Y suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ :
$P\left(Y \in [\mu - \sigma\,;\mu + \sigma]\right) = 0{,}68$.
Pour des raisons de symétrie :
$P\left(Y \leqslant \mu - \sigma\right) = 0{,}16$ et
$P\left(Y \geqslant \mu + \sigma\right) = 0{,}16$.



On a $\mu = 30$. Il faut déterminer σ en utilisant l'égalité $P(Y \leqslant 12) = 0{,}025$.

On sait que si Y suit une loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ, alors la variable aléatoire Z définie par $Z = \dfrac{Y - \mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

$Y \leqslant 12 \iff Y - 30 \leqslant 12 - 30 \iff Y - 30 \leqslant -18 \iff \dfrac{Y-30}{\sigma} \leqslant \dfrac{-18}{\sigma} \iff Z \leqslant -\dfrac{18}{\sigma}$

Donc $P(Y \leqslant 12) = 0{,}025$ équivaut à $P\left(Z \leqslant -\dfrac{18}{\sigma}\right) = 0{,}025$, sachant que Z suit la loi normale centrée réduite.

À la calculatrice, on cherche le réel b tel que $P(Z \leqslant b) = 0{,}025$, et on trouve $b \approx -1{,}96$.

Donc $-\dfrac{18}{\sigma} = -1{,}96$ donc $\sigma = \dfrac{18}{1{,}96} \approx 9{,}2$. On en déduit que $\mu + \sigma \approx 39{,}2$.

Le temps qu'une personne interrogée doit avoir passé à suivre ces Jeux Olympiques pour faire partie des 16 % de personnes interrogées ayant ainsi passé le plus de temps est donc d'environ 39,2 heures.