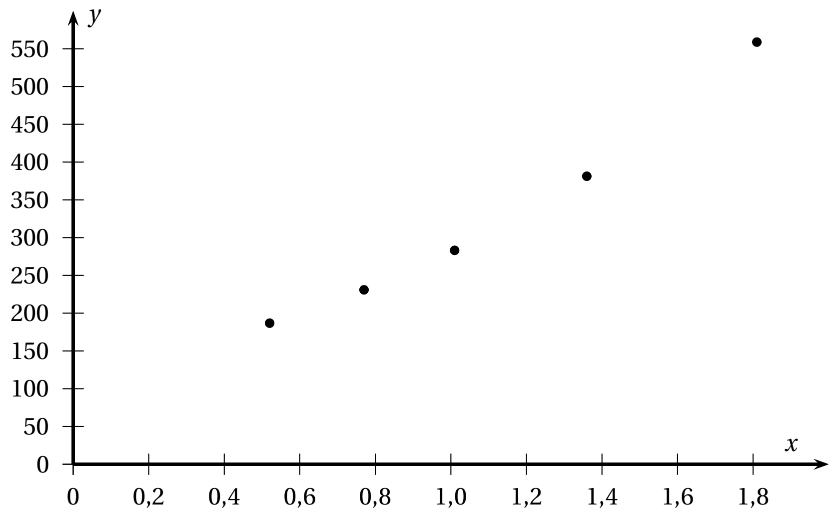
൷ Corrigé du BTS session 2012 ൷
Polynésie Comptabilité et gestion des organisations

Exercice 1 **10 points**

A. Ajustement affine

1.



2. **a.** Voir à la fin

b. Le coefficient de corrélation linéaire entre x et z est égal à 1.

c. La calculatrice donne $z = 0,85x + 4,79$.

3. **a.** On a $z = \ln y = 0,85x+4,79$, donc $y = \mathrm{e}^{0,85x+4,79} = \mathrm{e}^{4,79} \times \mathrm{e}^{0,85x} \approx 120,3\mathrm{e}^{0,85x}$.

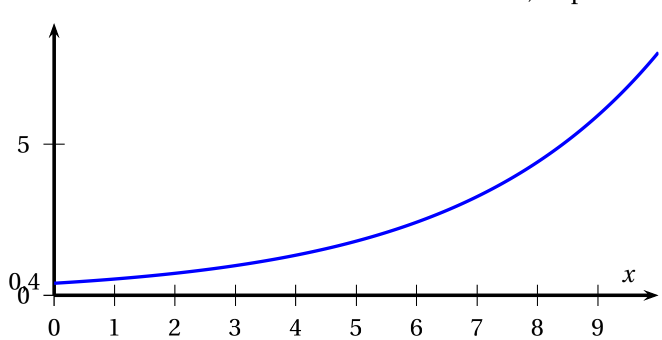
b. Pour $x = 2$, la droite d'ajustement donne $y \approx 120,3\mathrm{e}^{0,85\times 2} = 120,3\mathrm{e}^{1,7} \approx 658,16$, soit environ 658 200 €.

B. Étude d'une fonction

$$f(x) = 0,4\mathrm{e}^{0,3x}.$$

1. On sait que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{0,3x} = +\infty$, donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

2. **a.** On a $f'(x) = 0,4 \times 0,3\mathrm{e}^{0,3x} = 0,12\mathrm{e}^{0,3x}$.
On sait que quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{0,3x} > 0$, donc $f'(x) > 0$ sur $[0~;~+\infty[$.
On a $f(0) = 0,4\mathrm{e}^0 = 0,4$.
Conclusion : la fonction est strictement croissante de 0,4 à plus l'infini.



C. Calcul intégral et applications

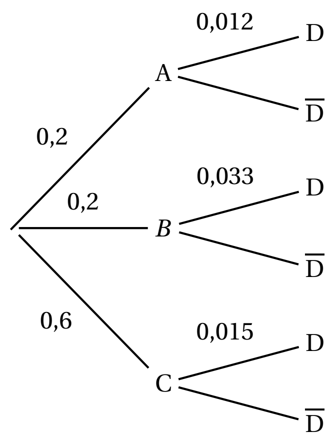
$$P_m = \frac{1}{4}\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. On sait qu'une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{0,3x}$ est la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{0,3}\mathrm{e}^{0,3x}$.
   Donc une primitive de la fonction f est la fonction F définie par $x \longmapsto F(x) = \dfrac{0,4}{0,3}\mathrm{e}^{0,3x} = \dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{0,3x}$.
   On a donc $P_m = \dfrac{1}{4}\displaystyle\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{4}\left[\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{0,3x}\right]_1^5 = \dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{0,3\times 5} - \dfrac{1}{4}\times\dfrac{4}{3}\mathrm{e}^{0,3\times 1} = \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{1,5} - \dfrac{1}{3}\mathrm{e}^{0,3} = \dfrac{1}{3}\left(\mathrm{e}^{1,5} - \mathrm{e}^{0,3}\right)$.
2. La calculatrice donne $P_m \approx 1{,}0439$ soit 1,044 au millième près.

Exercice 2 **10 points**

A. Probabilités conditionnelles

On peut dresser l'arbre suivant :



1. D'après la loi des probabilités totales :
   $p(\text{D}) = p(\text{A}) \times p_{\text{A}}(\text{D}) + p(\text{B}) \times p_{\text{B}}(\text{D}) + p(\text{C}) \times p_{\text{C}}(\text{D}) = 0,2 \times 0,012 + 0,2 \times 0,033 + 0,6 \times 0,015 = 0,018$, soit 1,8 %.
2. Il faut trouver $p_{\text{D}}(\text{B}) = \dfrac{p(\text{D} \cap \text{B})}{p(\text{D})} = \dfrac{0,2 \times 0,033}{0,018} \approx 0,366$ soit 0,37 au centième près.

B. Loi binomiale

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-2}

1. Les tirages avec remise sont in dépendants et la production est assez importante pour que la probabilité de tirer une ampoule défectueuse ne varie pas : la variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0,018$.
2. On a $P(X = 2) = \dfrac{50 \times 49}{2} \times 0,018^2 \times (1 - 0,018)^{48} \approx 0{,}1659$ soit 0,17 au centième près.
3. La probabilité qu'il n'y ait aucune pièce défectueuse est : $0,018^0 \times (1 - 0,018)^{50} \approx 0,403$.
   Donc la probabilité qu'au moins une pièce soit défectueuse est égale à $1 - 0,403 = 0,597$ soit 0,60 au centième près.

C. Loi normale

Dans cette partie les résultats seront arrondis à 10^{-4}

1. La calculatrice livre $P(Y \leqslant 8615) \approx 0,89616$ soit environ 0,8962.
2. On admet que Y suit une loi normale de moyenne m et d'écart type σ.

   a. Tout repose sur le théorème suivant :
   si la variable aléatoire Y suit la loi normale de moyenne m et d'écart type σ, alors la variable aléatoire $\dfrac{Y-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
   $Y \leqslant 8204 \iff Y-m \leqslant 8204-m \iff \dfrac{Y-m}{\sigma} \leqslant \dfrac{8204-m}{\sigma}$ donc
   $P(Y \leqslant 8204) = 0,8531 \iff P\left(\dfrac{Y-m}{\sigma} \leqslant \dfrac{8204-m}{\sigma}\right) = 0,8531$
   $\iff P\left(T \leqslant \dfrac{8204-m}{\sigma}\right) = 0,8531$ où $T = \dfrac{Y-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.
   On cherche donc β tel que $P(T \leqslant \beta) = 0,8531$ où T suit la loi normale centrée réduite.
   La calculatrice donne $\beta \approx 1,05$ (par `invNorm`).
   On a donc $\dfrac{8204-m}{\sigma} = 1,05$ ce qui équivaut à $1,05\sigma + m = 8204$.

   En faisant la même chose pour $P(Y \leqslant 7436 = 0,2912$, on arrive à $-0,55\sigma + m = 7436$.

   b. On a donc le système :
   $\left\{\begin{array}{rcl} 1,05\sigma + m &=& 8204\\ -0,55\sigma + m &=& 7436\end{array}\right.$ d'où par différence membres à membres
   $1,6\sigma = 768 \iff \sigma = \dfrac{768}{1,6} = 480$, puis $m = 8204 - 1,05 \times 480 = 7700$.

Annexe (à rendre avec la copie)

Exercice 1

A. 2. a. **tableau 1**

année	2006	2007	2008	2009	2010
x_i	0,52	0,77	1,01	1,36	1,81
y_i	186,7	230,9	283,1	381,3	558,9
z_i	5,230	5,442	5,646	5,944	6,326