Corrigé du brevet de technicien supérieur Métropole septembre 2020 – Groupement C1 - C2

Exercice 1 — 10 points

À la sortie d'un four, un solide dont la température est de 70 °C est placé, pour le refroidir, dans une pièce dont la température ambiante reste constante et égale à $T_{amb} = 20$ °C. Le solide peut être emballé pour expédition dès que sa température passe au-dessous de 40°C.

On désigne par $T(t)$, la température, en degré Celsius (°C), du solide à l'instant t (t exprimé en minute).

$T'(t)$ représente la vitesse de refroidissement à l'instant t. La loi de Newton établit que cette vitesse est proportionnelle à la différence entre la température du solide et la température ambiante, soit :

$$T'(t) = k\left(T(t) - T_{amb}\right)$$

où k est une constante et T_{amb} la température ambiante, en degré Celsius, de la pièce.

Partie A

1. La constante k dépend des matériaux. Pour le solide qui nous intéresse, $k = -0{,}07$.
   On sait que $T_{amb} = 20$ °C.
   $T'(t) = k\left(T(t) - T_{amb}\right) \iff T'(t) = -0{,}07\,(T(t) - 20) \iff T'(t) = -0{,}07T(t) + 1{,}4$
   $\iff T'(t) + 0{,}07T(t) = 1{,}4$
   donc T est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad y' + 0{,}07y = 1{,}4$.
2. La solution générale de l'équation différentielle $ay' + by = 0$ pour a et b deux réels non nuls, est la fonction g définie par $g(t) = k\mathrm{e}^{-\frac{b}{a}t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
   Donc la solution, dans $[0\,;\,+\infty[$, de l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + 0{,}07y = 0$ est la fonction g définie par $g(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}07t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
3. On cherche parmi les solutions proposées ci-dessous une solution particulière de (E).

a. $f(t) = 20$	**b.** $f(t) = 1{,}4$	**c.** $f(t) = 20t$

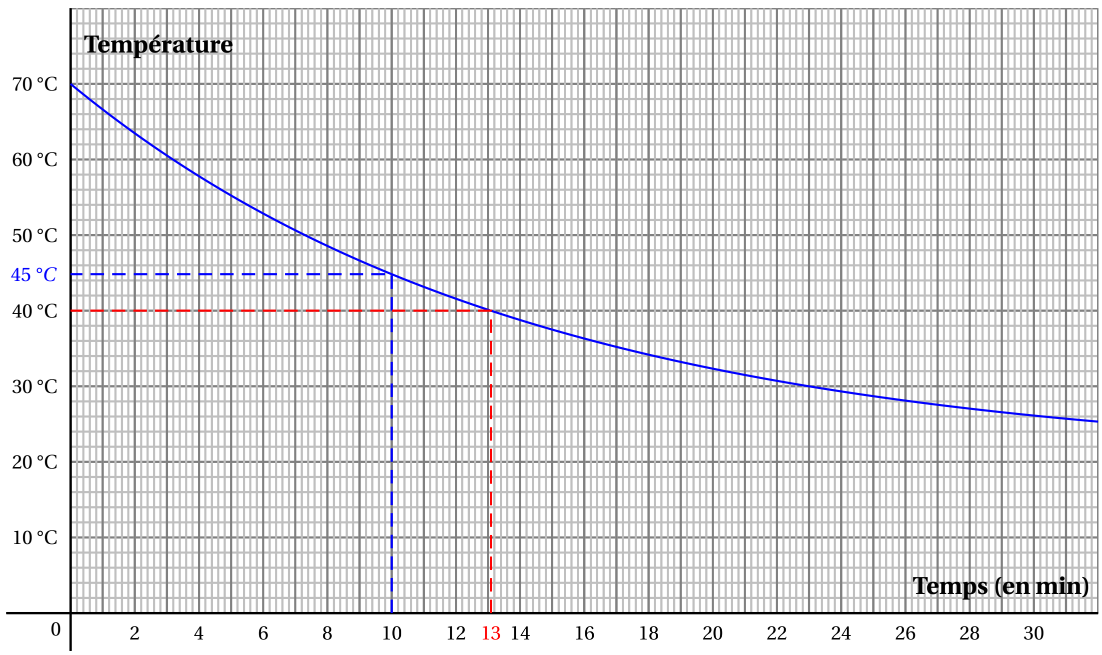
   Si $f(t) = 20$, alors $f'(t) = 0$ donc $f'(t) + 0{,}07f(t) = 0 + 0{,}07 \times 20 = 1{,}4$; donc la fonction f définie par $f(t) = 20$ est une solution particulière de (E).
4. La solution générale de l'équation différentielle (E) est la somme de la solution générale de l'équation sans second membre (E_0) et d'une solution particulière de (E) ;
   c'est donc la fonction f définie par $f(t) = k\mathrm{e}^{-0{,}07t} + 20$ où $k \in \mathbb{R}$.
5. **a.** D'après l'énoncé, $T(0) = 70$.

   b. $T(0) = 70 \iff k\mathrm{e}^{0} + 20 = 70 \iff k = 50$
   Donc $T(t) = 50\,\mathrm{e}^{-0{,}07t} + 20$ pour $t \in [0\,;\,+\infty[$.

Partie B

Dans cette partie, on admet que pour tout réel t de l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$, $T(t) = 50\,\mathrm{e}^{-0,07t} + 20$.

On donne ci-dessous $\mathscr{C}$, la courbe représentative de la fonction T dans le plan muni d'un repère orthogonal.



1. À l'aide du graphique ci-dessus :

   a. La température du solide au bout de 10 minutes est d'environ 45 °C.

   b. Le solide peut être emballé pour expédition quand sa température descend en dessous de 40 °C, soit après environ 13 minutes.

2. Un logiciel de calcul formel a permis d'obtenir les résultats ci-dessous que l'on pourra utiliser dans les questions suivantes :

1	`f(x):=exp((-0,07)*x)`
	x -> exp(-0,07*x)
2	`deriver(f(x))`
	-0.07*exp(-0,07*x)
3	`limite(f(x),x,+infinity)`
	0
4	`integration(f(x),x,0,10)`
	7,19163851727

   a. $f(x) = \mathrm{e}^{-0,07x}$ donc $T(t) = 50f(t) + 20$;
   on en déduit que $T'(t) = 50f'(t) = 50 \times \left(-0,07\,\mathrm{e}^{-0,07t}\right) < 0$ sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Donc la fonction T est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.

   b. D'après le logiciel, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} 50f(x) + 20 = 20$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} T(t) = 0$.
   La fonction T est décroissante et a pour limite 20, donc pour tout t, $T(t) \geqslant 20$, ce qui prouve que la température du solide ne peut atteindre 18 °C.

c. La température moyenne du solide lors des dix premières minutes est

$$\frac{1}{10-0}\int_0^{10} T(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\int_0^{10} 50f(t)+20\,\mathrm{d}t = \frac{1}{10}\left[\int_0^{10} 50f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{10} 20\,\mathrm{d}t\right]$$

$$= \frac{1}{10}\times 50\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{1}{10}\,[20t]_0^{10}$$

D'après le logiciel, $\displaystyle\int_0^{10} f(t)\,\mathrm{d}t \approx 7{,}191\,638\,517\,27$. De plus $[20t]_0^{10} = 200$.

Donc $\displaystyle\frac{1}{10-0}\int_0^{10} T(t)\,\mathrm{d}t \approx \frac{1}{10}\times 50\times 7{,}191\,638\,517\,27 + \frac{1}{10}\times 200 \approx 55{,}958$.

La température moyenne du solide lors des dix premières minutes est d'environ 56 °C.

Exercice 2 10 points

Partie A

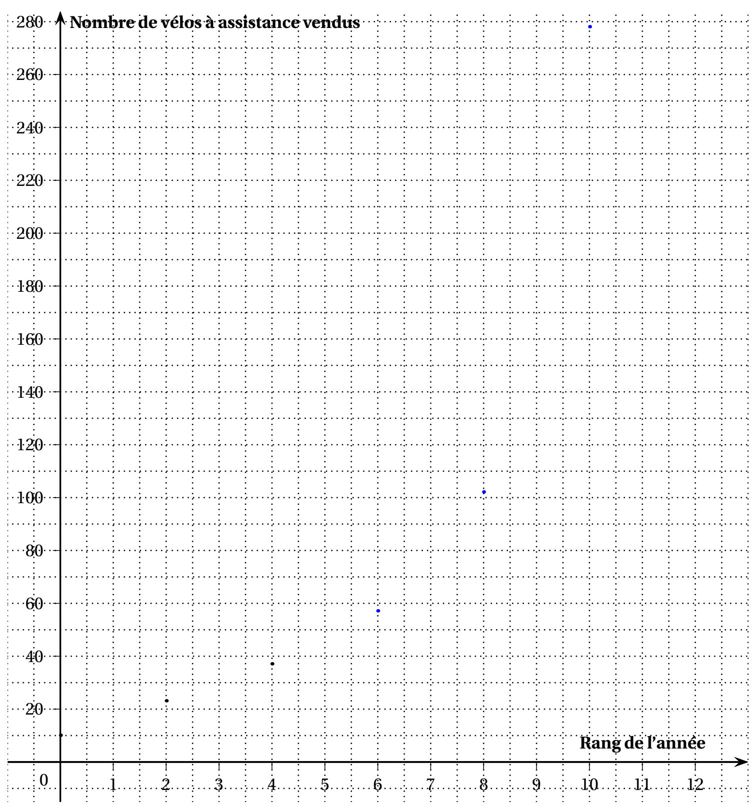
Le tableau ci-dessous donne l'évolution des ventes de vélos à assistance électrique en France entre 2007 et 2017.

Année	2007	2009	2011	2013	2015	2017
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10
Nombre de vélos à assistance électrique vendus (en milliers) : n_i	10	23	37	57	102	278

Données : Observatoire du Cycle

1. On a représenté ci-dessous le nuage des trois premiers points associés à la série $(x_i\,;\,n_i)$.

a. On complète le nuage de points :



b. Un ajustement affine ne semble pas envisageable car les points ne sont pas du tout alignés.

2. On pose $y_i = \ln(x_i)$. On complète au centième près le tableau ci-dessous :

Année	2007	2009	2011	2013	2015	2017
Rang de l'année : x_i	0	2	4	6	8	10
Nombre de VAE vendus (en milliers) : n_i	10	23	37	57	102	278
$y_i = \ln(n_i)$	2,3	3,14	3,61	4,04	4,62	5,63

3. On s'intéresse à l'ajustement affine de y_i en fonction de x_i.
Voici le résultat obtenu à l'aide d'une calculatrice :

```
LinearReg
     a = 0,30742857
     b = 2,35285714
     r = 0,98986741
     r²= 0,9798375
   MSe = 0,03403428
y = ax + b
```

Une équation de la droite de régression de y en x, avec les coefficients arrondis au dixième est $y = 0{,}3x + 2{,}4$.

4. L'année 2020 correspond au rang 13; pour $x = 13$, $y = 0{,}3 \times 13 + 2{,}4 = 6{,}3$.
On cherche n tel que $\ln(n) = 6{,}3$ donc $n = \mathrm{e}^{6,3} \approx 545$.
Si l'évolution se poursuit de la même façon, le nombre de vélos à assistance électrique vendus en France en 2020 serait de 545 milliers.

Partie B

Une entreprise produit en grande série des vélos à assistance électrique équipés de batteries au lithium-ion.

On propose d'étudier l'autonomie en kilomètre de ces vélos à assistance électrique en se plaçant dans des conditions usuelles de fonctionnement.

Soit X, la variable aléatoire qui, à chaque vélo à assistance électrique pris au hasard dans la production, associe son autonomie en kilomètre.

On admet que cette variable aléatoire X suit la loi normale de moyenne $\mu = 81$ et d'écart type $\sigma = 4$.

1. La probabilité que l'autonomie d'un vélo à assistance électrique pris au hasard dans la production soit supérieure à 84 kilomètres est $P(X \geqslant 84) \approx 0{,}227$

2. **a.** On cherche une valeur approchée à l'unité du réel d tel que : $P(X \leqslant d) = 0{,}1$ parmi :

a. 88	**b.** 81	**c.** 76

- $\mu = 81$ donc $P(X \leqslant 81) = 0{,}5$; on peut éliminer la réponse **b.**
- $88 > \mu$ donc $P(X \leqslant 88) > 0{,}5$; on peut éliminer la réponse **a.**

Donc la bonne réponse est la **c** : $P(X \leqslant 76) = 0{,}1$.

b. On peut interpréter ce résultat ainsi : il y a 10 % des vélos qui ont une autonomie inférieure à 76 minutes.

Partie C

Dans cette partie, on considère que 4 % des batteries au lithium-ion présentent un défaut et sont qualifiées de « non conformes ».

Soit Y la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 batteries pris au hasard dans la production, associe le nombre de batteries non conformes.

La production est assez importante pour qu'on puisse assimiler un tel prélèvement de 100 batteries à un tirage avec remise.

1.
- Pour une batterie prise au hasard, il y a deux possibilités : elle est non conforme avec une probabilité de $p = 0{,}04$, ou elle est conforme.
- On prend 100 batteries au hasard ce qui est assimilé à un tirage avec remise.

La variable aléatoire Y qui donne le nombre de batteries non conformes suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0{,}04$.

2. **a.** On trouve à la calculatrice : $P(Y \leqslant 5) \approx 0{,}788$..

b. On peut donc estimer qu'il y a 78,8 % de chances qu'il y ait au plus 5 batteries non conformes sur le lot de 100.

3. La probabilité que, dans un prélèvement au hasard de 100 batteries, toutes les batteries soient conformes est $P(Y = 0) \approx 0{,}017$.

4. $E(Y) = np = 100 \times 0{,}04 = 4$.
Dans un lot de 100 batteries, il y a en moyenne 4 batteries non conformes.