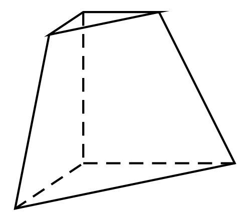
Corrigé du brevet de Technicien Supérieur
14 mai 2018 Groupement E

Exercice 1 — 10 points

Le but de cet exercice est d'étudier le pied de parasol représenté ci-contre.



A. Volume du pied de parasol

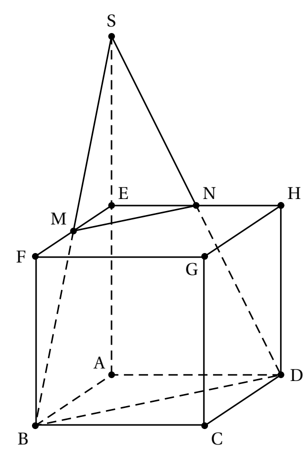
On considère le cube ABCDEFGH d'arête 20 cm.

Soit M le milieu de [FE].

Pour réaliser le pied de parasol, on coupe le cube par le plan (BMD).

On note S l'intersection de la droite (AE) avec le plan (BMD) et N le point d'intersection de la droite (EH) avec le plan (BMD).

On admet que N est le milieu de [EH].

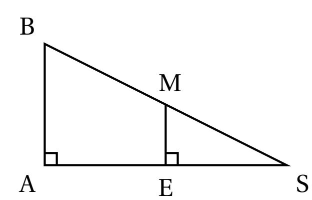


1. On se place dans le triangle ABS qui est rectangle en A.
   Les droites (AB) et (EM) sont toutes les deux perpendiculaires à (AS) donc elles sont parallèles.
   D'après le théorème de Thalès : $\dfrac{\text{SM}}{\text{SB}} = \dfrac{\text{SE}}{\text{SA}} = \dfrac{\text{EM}}{\text{AB}}$.

   On sait que M est le milieu de [FE] donc $\text{ME} = \dfrac{1}{2}\text{FE} = 10$.

   On en déduit que $\dfrac{\text{EM}}{\text{AB}} = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$ donc que $\dfrac{\text{SE}}{\text{SA}} = \dfrac{1}{2}$ et donc que E est le milieu de [SA].

   Or EA = 20 cm donc SA = 40 cm.



2. **a.** La pyramide SABD a pour base le triangle ABD et pour hauteur SA.
   L'aire en cm^2 du triangle ABD, rectangle en A, est $\dfrac{\text{AB} \times \text{AD}}{2} = \dfrac{20 \times 20}{2} = 200$.

   Le volume, en cm^3, de la pyramide SABD est donc $V = \dfrac{1}{3} \times 200 \times 40 = \dfrac{8\,000}{3}$.

b. La pyramide SEMN a pour base le triangle EMN et pour hauteur SE de longueur 20.

L'aire du triangle EMN, rectangle en E, est $\dfrac{\text{EM} \times \text{EN}}{2}$.

Les points M et N sont les milieux respectifs de [FE] et [EH] donc EM = EN = 10.

L'aire en cm^2 du triangle EMN est donc $\dfrac{10 \times 10}{2} = 50$.

Le volume, en cm^3, de la pyramide SEMN est donc $V' = \dfrac{1}{3} \times 50 \times 20 = \dfrac{1\,000}{3}$.

c. Le pied de parasol a pour volume, en cm^3, $V - V' = \dfrac{8\,000}{3} - \dfrac{1\,000}{3} = \dfrac{7\,000}{3}$.

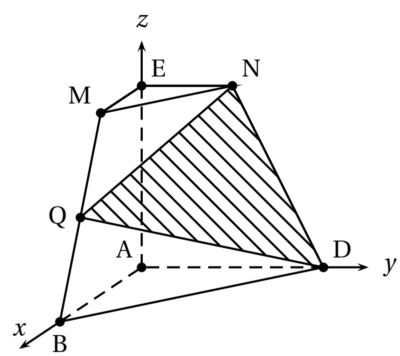
B. Aire d'un carreau de faïence

Le pied de parasol est orné d'un carreau de faïence représenté par le triangle hachuré sur la figure ci-contre.

Le but de cette partie est de calculer l'aire de ce triangle.

L'espace est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AI}}, \overrightarrow{\text{AJ}}, \overrightarrow{\text{AK}}\right)$ d'unité graphique 1 cm tel que $\overrightarrow{\text{AI}} = \dfrac{1}{20}\overrightarrow{\text{AB}}$, $\overrightarrow{\text{AJ}} = \dfrac{1}{20}\overrightarrow{\text{AD}}$ et $\overrightarrow{\text{AK}} = \dfrac{1}{20}\overrightarrow{\text{AE}}$

Ainsi les coordonnées du point B dans ce repère sont : B(20 ; 0 ; 0).



1. • Comme l'espace est muni du repère $\left(\text{A}\,;\,\overrightarrow{\text{AI}}, \overrightarrow{\text{AJ}}, \overrightarrow{\text{AK}}\right)$, le point J a pour coordonnées (0 ; 1 ; 0) ; de plus $\overrightarrow{\text{AJ}} = \dfrac{1}{20}\overrightarrow{\text{AD}}$ donc le point D a pour coordonnées (0 ; 20 ; 0).

Par un raisonnement analogue, on prouve que les coordonnées du point E sont (0 ; 0 ; 20).

• Le point M est le milieu de [FE] donc $\overrightarrow{\text{EM}} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{\text{EF}}$.

Or $\overrightarrow{\text{EF}} = \overrightarrow{\text{AB}}$ de coordonnées (20 ; 0 ; 0) ; donc $\overrightarrow{\text{EM}}$ a pour coordonnées (10 ; 0 ; 0).

E a pour coordonnées (0 ; 0 ; 20), donc $\overrightarrow{\text{EM}}$ a pour coordonnées $\left(x_\text{M}\,;\,y_\text{M}\,;\,z_\text{M} - 20\right)$.

On déduit que $\left(x_\text{M}\,;\,y_\text{M}\,;\,z_\text{M} - 20\right) = (10\,;\,0\,;\,0)$ donc que M a pour coordonnées (10 ; 0 ; 20).

• Par un raisonnement analogue, on prouve que les coordonnées du point N sont (0 ; 10 ; 20).

2. Soit Q le milieu de [MB].

Q a pour coordonnées $\left(\dfrac{x_\text{M} + x_\text{B}}{2}\,;\,\dfrac{y_\text{M} + y_\text{B}}{2}\,;\,\dfrac{z_\text{M} + z_\text{B}}{2}\right) = \left(\dfrac{10+20}{2}\,;\,\dfrac{0+0}{2}\,;\,\dfrac{20+0}{2}\right) = (15\,;\,0\,;\,10)$

3. a. • Le vecteur $\overrightarrow{\text{QN}}$ a pour coordonnées

$\left(x_\text{N} - x_\text{Q}\,;\,y_\text{N} - y_\text{Q}\,;\,z_\text{N} - z_\text{Q}\right) = (0 - 15\,;\,10 - 0\,;\,20 - 10) = (-15\,;\,10\,;\,10)$

Donc $\text{QN}^2 = (-15)^2 + (10)^2 + (10)^2 = 225 + 100 + 100 = 425$ donc $\text{QN} = \sqrt{425}$

• Le vecteur $\overrightarrow{\text{QD}}$ a pour coordonnées

$\left(x_\text{D} - x_\text{Q}\,;\,y_\text{D} - y_\text{Q}\,;\,z_\text{D} - z_\text{Q}\right) = (0 - 15\,;\,20 - 0\,;\,0 - 10) = (-15\,;\,20\,;\,-10)$

Donc $\text{QD}^2 = (-15)^2 + (20)^2 + (-10)^2 = 225 + 400 + 100 = 725$ donc $\text{QD} = \sqrt{725}$

b. $\overrightarrow{\text{QN}} \cdot \overrightarrow{\text{QD}} = (-15) \times (-15) + 10 \times 20 + 10 \times (-10) = 225 + 200 - 100 = 325$

c. $\overrightarrow{\text{QN}} \cdot \overrightarrow{\text{QD}} = \text{QN} \times \text{QD} \times \cos\left(\widehat{\text{NQD}}\right)$

On en déduit que $325 = \sqrt{425} \times \sqrt{725} \times \cos\left(\widehat{\text{NQD}}\right)$ et donc que $\cos\left(\widehat{\text{NQD}}\right) = \dfrac{325}{\sqrt{425 \times 725}}$.

On trouve à la calculatrice que $\widehat{\text{NQD}} \approx 54{,}2$ °.

4. L'aire du triangle NQD est donnée par
$\mathscr{A} = \text{QN} \times \text{QD} \times \sin\left(\widehat{\text{NQD}}\right) \approx \sqrt{425} \times \sqrt{725} \times \sin(54{,}2) \approx 450$.

C. Représentation en perspective

La représentation en perspective centrale du cube et du pied de parasol est commencée en annexe 1. Trois arêtes y sont représentées, ainsi que la ligne d'horizon avec comme plan frontal le plan (BCF). On note `a`, `b`, `c`, `d`, `e`, `f`, `g`, `h`, `m` et `n` les images respectives des points A, B, C, D, E, F, G, H, M, N dans cette représentation en perspective centrale.

1. Voir graphique.
2. Le point d'intersection de la droite (`ef`) et de la ligne d'horizon s'appelle le point de fuite.
   C'est en ce point que les lignes qui s'éloignent du plan frontal convergent.

Exercice 2 — 10 points

Une des applications importantes des courbes de Bézier concerne la typographie et notamment les polices de caractère. Le but de cet exercice est de modéliser un caractère particulier en utilisant trois courbes de Bézier $\mathscr{C}_1$, $\mathscr{C}_2$, $\mathscr{C}_3$ et une symétrie axiale.

Dans tout l'exercice, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}\,;\,\vec{\imath}\,,\,\vec{\jmath}\right)$. Une représentation du plan est fournie en annexe 2 sur laquelle les courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_3$ sont déjà tracées.

1. Étude de la courbe $\mathscr{C}_1$

La courbe $\mathscr{C}_1$, tracée sur l'annexe 2, est une courbe de Bézier à trois points de contrôle A, B et C de telle sorte que :

— les coordonnées de A et C sont A(2 ; 0) et C(1 ; 3) ;
— la tangente en A à $\mathscr{C}_1$ est la droite d'équation $y = 2 - x$;
— la tangente en C est verticale.

Les coordonnées du point B sont :

(0 ; 2)	(1 ; 0)	$\boxed{(1\,;\,1)}$	(1 ; 2)

> La tangente en C à la courbe $\mathscr{C}_1$ est verticale donc d'équation $x = x_{\text{C}}$ soit $x = 1$.
> La tangente en A à la courbe $\mathscr{C}_1$ a pour équation $y = 2 - x$.
> Donc le point de contrôle B a ses coordonnées qui vérifient à la fois $x = 1$ et $y = 2 - x$.
> Le point B a donc pour coordonnées (1 ; 1).

2. Tracé de la courbe $\mathscr{C}_2$

a. On place sur le graphique de l'annexe 2 les points C(1 ; 3) ; D(4 ; 1) et E(6 ; 3).
La courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$, définie par les trois points de contrôle C, D et E, est l'ensemble des points $M(t)$ du plan tels que pour tout t de l'intervalle [0 ; 1] :

$$\overrightarrow{\text{O}M(t)} = (1-t)^2\,\overrightarrow{\text{OC}} + 2t(1-t)\,\overrightarrow{\text{OD}} + t^2\,\overrightarrow{\text{OE}}.$$

b. La courbe de Bézier $\mathcal{C}_2$ est définie par les trois points de contrôle C, D et E, donc la tangente en C à la courbe $\mathcal{C}_2$ est la droite (CD), et la tangente en E à la courbe $\mathcal{C}_2$ est la droite (ED).

c. $\overrightarrow{\mathrm{O}M(t)} = (1-t)^2\overrightarrow{\mathrm{OC}} + 2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}} + t^2\overrightarrow{\mathrm{OE}} \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& (1-t)^2x_{\mathrm{C}} + 2t(1-t)x_{\mathrm{D}} + t^2x_{\mathrm{E}} \\ y &=& (1-t)^2y_{\mathrm{C}} + 2t(1-t)y_{\mathrm{D}} + t^2y_{\mathrm{E}} \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& (1-t)^2\times 1 + 2t(1-t)\times 4 + t^2\times 6 \\ y &=& (1-t)^2\times 3 + 2t(1-t)\times 1 + t^2\times 3 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& 1-2t+t^2+8t-8t^2+6t^2 \\ y &=& 3-6t+3t^2+2t-2t^2+3t^2 \end{array}\right.$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -t^2+6t+1 \\ y &=& 4t^2-4t+3 \end{array}\right.$

Donc les coordonnées x et y des points $M(t)$ de la courbe $\mathcal{C}_2$ ont pour expression :

$$x = f(t) = -t^2+6t+1 \text{ et } y = g(t) = 4t^2-4t+3.$$

d. On étudie les variations des fonctions f et g pour t dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.

$f'(t) = -2t+6 > 0$ sur $[0\,;1]$ et $g'(t) = 8t-4 > 0$ sur $\left]\dfrac{1}{2}\,;1\right]$

t	0		$\frac{1}{2}$		1
$f'(t)$		$+$		$+$	
$f(t)$			$\nearrow$		
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

e. La tangente à la courbe $\mathcal{C}_2$ au point S obtenu pour $t = \dfrac{1}{2}$ est horizontale car $g'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{1}{2}\right) \neq 0$; un vecteur directeur de cette tangente est donc le vecteur $\vec{\imath}$.

f. Pour $t = \dfrac{1}{2}$, $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = -\dfrac{1}{4} + 6\times\dfrac{1}{2} + 1 = 3{,}75$ et $g\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4\times\dfrac{1}{4} - 4\times\dfrac{1}{2} + 3 = 2$.

Le point S a pour coordonnées $(3{,}75\,;2)$. Voir tracés sur le graphique.

g. La courbe $\mathcal{C}_1$ admet en C une tangente verticale. La courbe $\mathcal{C}_2$ admet en C pour tangente la droite (CD) ; or $x_{\mathrm{C}} \neq x_{\mathrm{D}}$ donc la droite (CD) n'est pas verticale.

Les courbes $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ n'admettent donc pas la même tangente en C.

3. Étude de la courbe $\mathcal{C}_3$

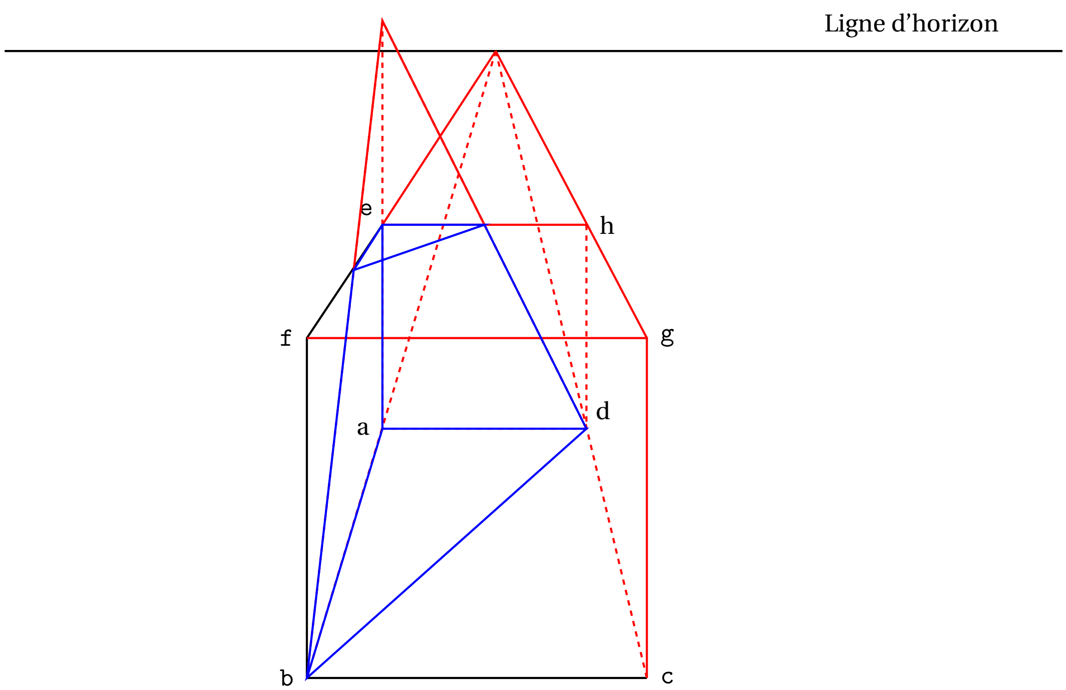
La courbe $\mathcal{C}_3$, déjà tracée sur l'annexe 2, est la courbe de Bézier définie par les quatre points de contrôle E, F, G et H, où F(9 ; 6) ; G(0 ; 10) et H(0 ; 12).

- La courbe $\mathcal{C}_2$ admet pour tangente au point E la droite (EF). La droite (EF) a pour équation réduite $y = \dfrac{y_{\mathrm{F}} - y_{\mathrm{E}}}{x_{\mathrm{F}} - x_{\mathrm{E}}}(x - x_{\mathrm{E}}) + y_{\mathrm{E}} \iff y = \dfrac{6-3}{9-6}(x-6)+3 \iff y = x-3$.
- La courbe $\mathcal{C}_3$ admet pour tangente au point E la droite (ED). La droite (ED) a pour équation réduite $y = \dfrac{y_{\mathrm{E}} - y_{\mathrm{D}}}{x_{\mathrm{E}} - x_{\mathrm{D}}}(x - x_{\mathrm{E}}) + y_{\mathrm{E}} \iff y = \dfrac{3-1}{6-4}(x-6)+3 \iff y = x-3$.

Les courbes $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ admettent donc la même tangente en E, la droite d'équation $y = x-3$.

4. Finalisation du tracé : voir graphique.

ANNEXE 1 À RENDRE AVEC LA COPIE



ANNEXE 2 À RENDRE AVEC LA COPIE