∽ Corrigé du brevet de technicien supérieur ∾

Groupement D 12 mai 2016

Durée : 2 heures

EXERCICE 1 11 points

Partie A :

1. Coefficient multiplicateur : $\left(1+\dfrac{50}{100}\right)=(1+0,5)=1,5$. La suite est géométrique de raison $q=1,5$.
   Ce n'est pas réaliste sur du long terme, car les vers manqueront de pain à un moment donné.
2. **a.**

Nombre de quinzaines t_i :	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Nombre de vers N_i	500	749	1 122	1 681	2 518	3 772	5 650	8 464	12 678	18 992
y_i	4,17	3,76	3,35	2,92	2,49	2,05	1,58	1,06	0,47	−0,30

   b. $y=-0,48t+4,31$.

   c. 7 mois donnent 14 quinzaines. De plus, on a $y=-0,48t+4,31$ et
   $y_i=\ln\left(\dfrac{33\,000}{N_i}-1\right)$ donc :
   $\ln\left(\dfrac{33\,000}{N_i}-1\right)=-0,48t+4,31 \iff \dfrac{33\,000}{N_i}-1=\mathrm{e}^{-0,48t+4,31} \iff$
   $\dfrac{33\,000}{N_i}=\mathrm{e}^{-0,48t+4,31}+1$
   d'où $N(t)=\dfrac{33\,000}{1+\mathrm{e}^{-0,48t+4,31}}$, donc $N(14)=\dfrac{33\,000}{1+\mathrm{e}^{-0,48\times14+4,31}}\approx 30\,280$ soit environ 30 300.
3. Comme $\lim\limits_{t\to+\infty}-0,48t=-\infty$, $\lim\limits_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-0,48t}=0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty}\left(1+75\mathrm{e}^{-0,48t}\right)=1$. Ceci nous donne : $\lim\limits_{t\to+\infty}N(t)=\dfrac{33\,000}{1}=33\,000$: non Kevin ne peut pas confirmer l' affirmation.

Partie B :

Question préliminaire : en sortie du four, le pain se refroidit directement (il ne se chauffe pas tout seul) et sa température va se stabiliser à la température ambiante donc cela correspond à la courbe 1.

I. Résolution d'une équation différentielle

1. $y'(t)+6y(t)=0 \iff y'(t)=-6y(t)$ donc $y(t)=K\mathrm{e}^{-6t}$ avec $K\in\mathbb{R}$.
2. Soit $g(t)=k$ donc $g'(t)=0$. On calcule $g'+6g=0+6\times k=6a$, ce qui donne $k=a$.
   La fonction $g(t)=a$ est bien une solution particulière de (E).
3. $y(t)=y_0(t)+h(t)=K\mathrm{e}^{-6}t+a$.
4. $y(0)=180 \iff K\mathrm{e}^0+a=180 \iff K=180-a$, donc $h(t)=(180-a)\mathrm{e}^{-6}t+a$.

II : Étude d'une fonction

Soit la fonction f définie pour tout t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, par $f(t)=(2t+1)\mathrm{e}^{-0,1t}$.

1. Le pain est entreposé à une température de 28°C et a est la température de la pièce donc $a = 28$.
   Donc $h(t)$ devient $f(t) = (180-28)\mathrm{e}^{-6t} + 28 = 152\mathrm{e}^{-6t} + 28$.
2. $f'Ct) = 152(-6)\mathrm{e}^{-6t} = -912\mathrm{e}^{-6t}$.
   Or pour tout $t \in [0\ ;\ +\infty[, \mathrm{e}^{-6t} > 0$ et $-912 < 0$, donc $f'(t) < 0$ sur $[0\ ;\ +\infty[$. f est décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
3. $f(0,5) = \theta = 152\mathrm{e}^{-6\times 0,5} + 28 = 152\mathrm{e}^{-3} + 28 \approx 36$ °C.
4. On calcule $f(t) = 62 \iff 152\mathrm{e}^{-6t} + 28 = 62 \iff \mathrm{e}^{-6t} = 62-28 \iff \ln\left(\mathrm{e}^{-6t}\right) = \ln\left(\dfrac{34}{152}\right)$
   $\iff -6t = \ln\left(\dfrac{7}{61}\right) \iff t = -\dfrac{1}{6}\ln\left(\dfrac{7}{61}\right) / approx 0,245$ soit environ 15 minutes.
5. On calcule $f(0,5) = 30 \iff 152\mathrm{e}^{-3} + T_a = 30 \iff T_a = 30 - 152\mathrm{e}^{-3}$ soit environ 22°C.

Exercice 2 : **9 points**

Partie A :

1. $P(I) = p(A\cap I) + p(B \cap I) = 0,55 \times 0,026 + 0,45 \times 0,036 = 0,0305$.
2. **a.** $X \to B(n\ ;\ p)$ avec $n = 100$ et $p = 0,03$.
   On veut savoir si une pipette a un défaut ou non, avec une probabilité de 3 % pour que la pipette ait un défaut. D'où $X \to B(0,03)$.
   On répète 100 fois de manière indépendante cette expérience de Bernoulli (le prélèvement est assimilé à un tirage avec remise.).Donc $X \to B(100\ ;\ 0,03)$ et $p(X = k) = C_{100}^{k} \times 0,03^{k} \times 0,97^{100-k}$.
   b. $p(X \geqslant 1) = 1 - p(X < 1) = 1 - p(X = 0) \approx 0,952$.
3. On a $C \to \mathcal{N}(100\ ;\ 1,021)$.
   a. $P(\text{Conformité}) = P(98 \leqslant C \leqslant 102) \approx 0,950$.
   b. On a $1\,000 \times 0,950 = 950$, donc 950 pipettes sont conformes.

Partie B :

1. On obtient $p_c = \dfrac{5}{200} = \dfrac{1}{40} = 0,025$.
2. $IC_{95\,\%} = \left[0,025 - 1,96\sqrt{\dfrac{0,025\times 0,975}{200}}\ ;\ 0,025 + 1,96\sqrt{\dfrac{0,025\times 0,975}{200}}\right] \approx [0,003\ ;\ 0,047]$.