∽ Corrigé du BTS Groupement D1 – mai 2021 ∾

Métropole – Antilles–Guyane – Polynésie

EXERCICE 1 — 10 points

Une usine agroalimentaire produit de la viande de bœuf hachée. On souhaite évaluer la durée de conservation de la viande de bœuf une fois hachée et conservée dans une chambre froide réglée à 0 °C.

Partie A

Voici le relevé du nombre de germes putréfiants par centimètre carré $\left(\text{cm}^2\right)$ tous les cinq jours à la surface d'un échantillon de viande de bœuf hachée conservée dans la chambre froide.

Nombre de jours de conservation t_i	0	5	10	15	20
Nombre N_i de germes putréfiants par cm^2	1 000	4 000	199 000	5 960 000	48 600 000

1. On effectue un changement de variable logarithmique : $z_i = \ln\left(N_i\right)$.

On complète le tableau suivant en arrondissant les valeurs au dixième.

Nombre de jours de conservation t_i	0	5	10	15	20
Nombre N_i de germes putréfiants par cm^2	1 000	4 000	199 000	5 960 000	48 600 000
$z_i = \ln N_i$	6,9	8,3	12,2	15,6	17,7

2. À l'aide de la calculatrice, on détermine une équation de la droite d'ajustement du nuage de points $M_i\left(t_i\ ;\ z_i\right)$ par la méthode des moindres carrés, sous la forme $z = at + b$.

En arrondissant les réels a et b au centième, on trouve $z = 0{,}58t + 6{,}36$.

3. a. On place les points $M_i\left(t_i\ ;\ z_i\right)$ sur le graphique.

b. Pour tracer la droite D d'équation $z = 0{,}6t + 6{,}4$, on calcule les coordonnées de deux points.

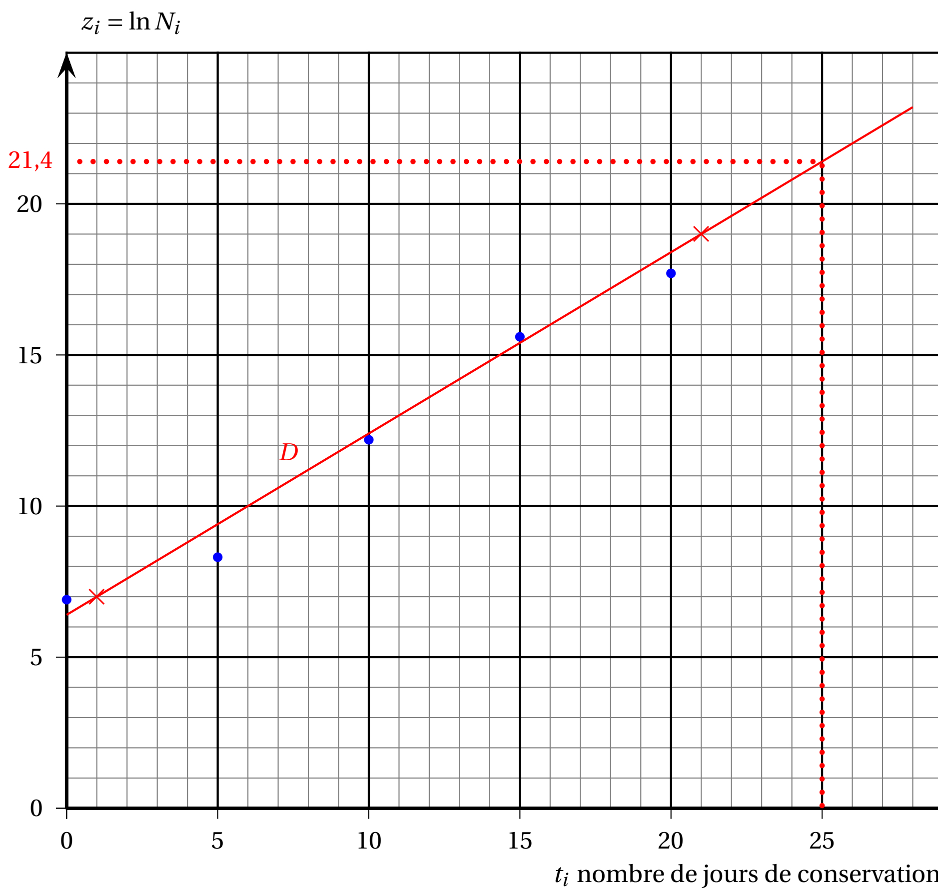
t	1	21
$z = 0{,}6t + 6{,}4$	7	19
point	(1 ; 7)	(21 ; 19)

4. On considère que la droite D est une droite d'ajustement du nuage de points $M_i\left(t_i\ ;\ z_i\right)$ et que ce modèle reste valable jusqu'au 30e jour de conservation dans la chambre froide.

On conserve un échantillon 25 jours donc $t = 25$. On déduit $z = 0{,}6 \times 25 + 6.4 = 21{,}4$.

Or $z = \ln(N)$ donc $\ln(N) = 21{,}4$ et donc $N = \text{e}^{21{,}4} \approx 1\,967\,441\,884$.

Donc 1 967 441 884 est une estimation du nombre de germes putréfiants par cm^2 sur l'échantillon de viande hachée si celui-ci est stocké et conservé pendant 25 jours dans la chambre froide.



Partie B

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t) = 600\,\mathrm{e}^{0,6t}$.

On admet que la fonction modélise le nombre de germes, par cm^2 sur la surface de la viande hachée conservée en chambre froide. Plus précisément, $f(t)$ est le nombre de germes par cm^2 sur la viande hachée après t jours de conservation dans la chambre froide à 0 °C

1. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} 0,6t = +\infty$ et $\displaystyle\lim_{T\to+\infty} \mathrm{e}^{T} = +\infty$ donc, en posant $T = 0,6t$ on peut dire que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{0,6t} = +\infty$ et donc que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = +\infty$.

   Le nombre de germes par cm^2 sur la viande hachée tend vers l'infini quand t augmente indéfiniment..
2. On note f' la fonction dérivée de la fonction f.

   Pour tout réel $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f'(t) = 600 \times 0,6 \times \mathrm{e}^{0,6t} = 360\,\mathrm{e}^{0,6t}$.
3. Pour tout réel $t \in [0\,;\,+\infty[$, $\mathrm{e}^{0,6t} > 0$ donc $f'(t) > 0$.

   Le nombre de germes par cm^2 sur la viande hachée augmente quand t augmente.
4. On définit le réel m par $m = \dfrac{1}{10-5}\displaystyle\int_5^{10} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   a. Le réel m représente la valeur moyenne de la fonction f entre 5 et 10, donc le nombre moyen de germes entre le jour 5 et le jour 10.

   b. Pour $a \neq 0$, la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{at}$ a pour primitive la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{a}\mathrm{e}^{at}$, donc la fonction

$t \longmapsto \mathrm{e}^{0,6t}$ a pour primitive la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{0,6t}$; on déduit que la fonction f a pour primitive la fonction F définie par $F(t) = 600 \times \dfrac{1}{0,6}\mathrm{e}^{0,6t}$, c'est-à-dire $F(t) = 1\,000\,\mathrm{e}^{0,6t}$.

c. $m = \dfrac{1}{10-5}\displaystyle\int_5^{10} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{5}\left[F(10) - F(5)\right] = \dfrac{1}{5}\left[1\,000\,\mathrm{e}^{0,6\times 10} - 1\,000\,\mathrm{e}^{0,6\times 5}\right] = 200\,\mathrm{e}^{6} - 200\,\mathrm{e}^{3}$.

5. On admet que la viande hachée peut être commercialisée si, lorsqu'elle quitte l'usine, la concentration de germes putréfiants à sa surface est strictement inférieure à 3 000 germes par cm^2.

a. On résout l'inéquation $f(t) < 3000$ sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.

$f(t) < 3000 \iff 600\,\mathrm{e}^{0,6t} < 3000 \iff \mathrm{e}^{0,6t} < 5 \iff 0,6t < \ln(5) \iff t < \dfrac{\ln(5)}{0,6}$

Donc l'inéquation a pour ensemble solution $S = \left[0\,;\,\dfrac{\ln(5)}{0,6}\right[$.

b. $\dfrac{\ln(5)}{0,6} \approx 2,7$ donc l'usine ne peut pas conserver la viande de bœuf hachée produite en chambre froide plus de deux jours avant de la commercialiser.

6. La viande hachée pourra ensuite être vendue à des particuliers tant que le nombre de germes par cm^2 ne dépassera pas 27 000.

On appelle durée limite de consommation le nombre maximal de jours pendant lesquels cette viande peut être vendue à des particuliers.

a. Soit l'algorithme ci-dessous :

```
J ← 0
N ← 600
Tant Que N ⩽ 27000
        J ← J + 1
        N ← 600 * e^(0,6*J)
Fin Tant Que
Afficher J
```

La valeur de J affichée en sortie est le premier jour à partir duquel le nombre de germes sera strictement supérieur à 27000, donc tel que $f(J-1) \leqslant 27000$ et $f(J) > 27000$.

En utilisant le tableau de valeurs de la fonction f donné par la calculatrice, on trouve : $f(6) \approx 21\,959 \leqslant 27000$ et $f(7) \approx 40012 > 27000$. La valeur de J affichée en sortie est 7.

b. On en déduit que la durée limite de consommation est de 6 jours.

EXERCICE 2 — 10 points

Pour améliorer l'hygiène de baignade dans un spa, il est possible de traiter l'eau aux ultra-violets (UV). La lampe UV, placée dans une chambre de désinfection, diffuse des rayons ultra-violets en continu. En passant devant cette lampe, dans le système de filtration, l'eau est désinfectée et débarrassée des micro-organismes.

Partie A

Une étude effectuée sur l'ensemble des spas installés par un fabricant indique que :

- 40 % des spas sont équipés de lampe UV et, parmi eux, 2 % présentent un problème de filtration ;

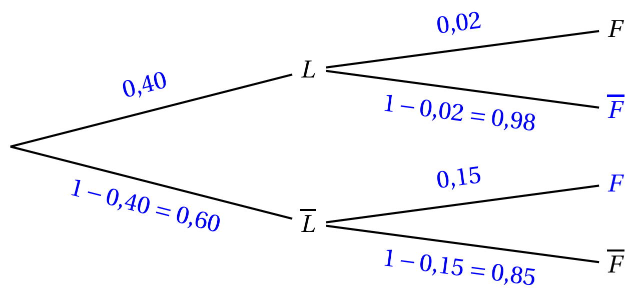
- Parmi les spas, non-équipés de lampe UV, 15 % présentent un problème de filtration.

On choisit un spa au hasard parmi ceux installés par le fabricant.

On note :

- L l'évènement « le spa est équipé d'une lampe UV » ;
- F l'évènement « le spa présente un problème de filtration » ;
- $\overline{L}$ et $\overline{F}$ les évènements contraires respectifs des évènements L et F.

1. On complète l'arbre pondéré.



2. D'après la formule des probabilités totales :

$P(F) = P\left(L \cap F\right) + P\left(\overline{L} \cap F\right) = P(L) \times P_L(F) + P\left(\overline{L}\right) \times P_{\overline{L}}(F) = 0{,}40 \times 0{,}02 + 0{,}69 \times 0{,}15 = 0{,}098$

3. Le spa choisi au hasard présente un problème de filtration.

La probabilité que ce spa ne possède pas de lampe UV est :

$P_F\left(\overline{L}\right) = \dfrac{P\left(\overline{L} \cap F\right)}{P(F)} = \dfrac{0{,}60 \times 0{,}15}{0{,}098} \approx 0{,}918$

4. Lors d'une opération de maintenance sur un parc de 78 spas installés par le fabriquant, un technicien comptabilise 12 spas présentant un problème de filtration.

a. Une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p des spas installés par ce fabricant qui présentent un problème de filtration est $f = \dfrac{12}{78} = \dfrac{2}{13} \approx 0{,}154$.

b. Un intervalle de confiance au seuil de 95 % cette proportion p est :

$\left[f - 1{,}96\sqrt{\dfrac{f\left(1-f\right)}{n}}\ ;\ f + 1{,}96\sqrt{\dfrac{f\left(1-f\right)}{n}}\right] = \left[\dfrac{2}{13} - 1{,}96\sqrt{\dfrac{\frac{2}{13} \times \frac{11}{13}}{78}}\ ;\ \dfrac{2}{13} + 1{,}96\sqrt{\dfrac{\frac{2}{13} \times \frac{11}{13}}{78}}\right]$
$\approx \left[0{,}073\ ;\ 0{,}234\right]$

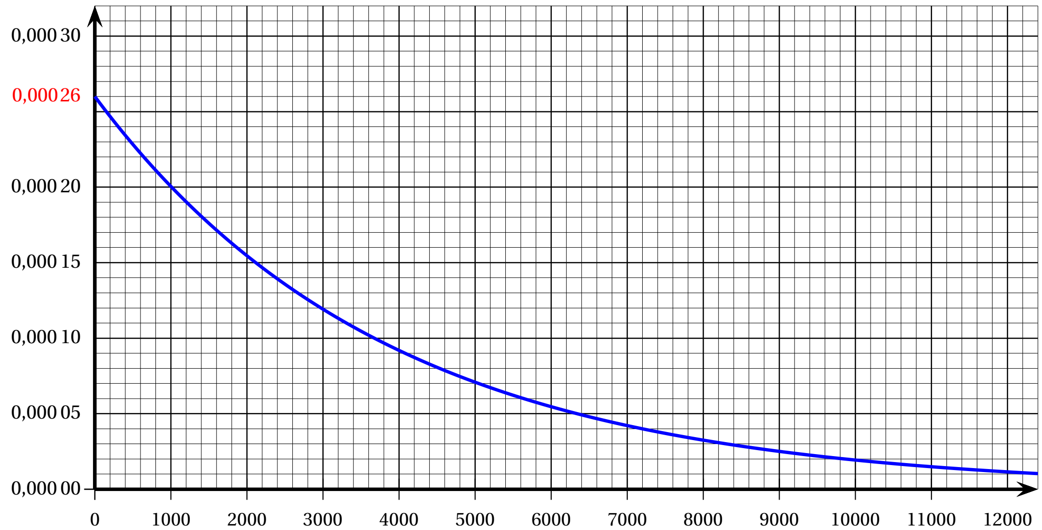
Partie B

On s'intéresse désormais à la durée de vie des lampes UV. Celle-ci, exprimée en heures, est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif.

On rappelle que la fonction de densité f d'une telle variable aléatoire est donnée pour tout réel $t \geqslant 0$ par : $f(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$, dont la courbe ci-après est la représentation graphique.

1. $f(t) = \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc $f(0) = \lambda\,\mathrm{e}^{0} = \lambda$.

Donc λ est l'ordonnée du point d'intersection de la courbe avec l'axe des ordonnées, donc 0,000 26 (voir graphique).



2. On considère la proposition suivante : « en moyenne, une lampe UV tombe en panne au bout de 1 000 heures ».

L'espérance mathématique d'une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ est $E(X) = \dfrac{1}{\lambda}$. Or $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}000\,26} \approx 3\,846$.

Donc une lampe UV tombe, en moyenne, en panne au bout de 3 846 heures.

La proposition est donc fausse.

3. D'après le cours, on sait que si la variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, on a : $P(X \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$ donc $P(X > a) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}\right) = \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

Donc la probabilité qu'une lampe n'ait pas eu de panne au cours des 500 premières heures est : $P(X > 500) = \mathrm{e}^{-0{,}000\,26 \times 500} = \mathrm{e}^{-0{,}13} \approx 0{,}878$.

Partie C

Lors de l'utilisation des lampes UV, on constate que la probabilité de la durée d'utilisation d'une lampe UV prise au hasard dépasse 1000 heures est $p = 0{,}77$.

On prélève au hasard un lot de 50 lampes dans la production, jugée suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise. On appelle Y la variable aléatoire qui, à un échantillon de 50 lampes UV de la production, associe le nombre de lampes UV dont la durée d'utilisation dépasse 1000 heures.

1. Il y a deux possibilités pour une lampe : elle a une durée d'utilisation supérieure à 1 000 heures, avec une probabilité de $p = 0{,}77$, ou elle a une durée d'utilisation inférieure ou égale à 1 000 heures.

On prélève au hasard un lot de 50 lampes dans la production, jugée suffisamment importante pour assimiler ce choix à un tirage avec remise.

Donc la variable aléatoire Y qui, à un échantillon de 50 lampes UV de la production, associe le nombre de lampes UV dont la durée d'utilisation dépasse 1000 heures suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}77$.

2. D'après la calculatrice, $P(Y \geqslant 42) \approx 0{,}156$.

Sur un lot de 50 lampes, il y a une probabilité de 0,156 qu'au moins 42 lampes dépassent 1 000 heures de durée d'utilisation.

3. L'espérance de la variable aléatoire Y est $E(Y) = np = 50 \times 0,77 = 38,5$.

Dans un lot de 50 lampes, il y en a, en moyenne, 39 dont la durée d'utilisation dépassera 1 000 heures.