Brevet de technicien supérieur - Nouvelle Calédonie session 2017 - groupement A2

Exercice 1 **4 points**

1. Réponse **a.** : La fonction v est impaire car sa courbe représentative est symétrique par rapport à l'origine du repère.
2. Réponse **a.** : La fonction v est périodique de période 0,02 donc $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{2\pi}{0,02} = 100\pi$.
3. Réponse **c.** : Le coefficient a_0 est égal à 0 car la fonction v est impaire.
4. Réponse **b.** : $V_{\text{ef}}^2 = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T [v(t)]^2\,\mathrm{d}t = \dfrac{2}{T}\displaystyle\int_0^{\frac{T}{2}} [v(t)]^2\,\mathrm{d}t$ car v est impaire et donc v^2 est paire.
   $V_{\text{ef}}^2 = \dfrac{2}{0,02}\displaystyle\int_0^{0,01} [v(t)]^2\,\mathrm{d}t = 100\displaystyle\int_{0,002}^{0,008} 220^2\,\mathrm{d}t = 100\left[220^2\,t\right]_{0,002}^{0,008} = 100(220^2 \times 0,008 - 220^2 \times 0,002) = 29\,040$. Ainsi $V_{\text{ef}} = \sqrt{29\,040} \simeq 170$

Exercice 2 **9 points**

Partie A : Étude des dimensions des tablettes

1. **a.** $P(241,9 \leqslant L \leqslant 243,1) \simeq 0{,}9973$.
   b. 99,73 % des tablettes ont une longueur compatible avec leur étui.
2. **a.** Tableau de valeurs :

α	0,27	0,28	0,29	0,30
$P(166,8-\alpha \leqslant l \leqslant 166,8+\alpha)$	0,9931	0.9949	0,9963	0,9973

   b. $\alpha = 0,29$ et $[166,8-\alpha\ ;\ 166,8+\alpha] = [166,51\ ;\ 167,09]$.

Partie B : Étude d'un défaut de l'étui

1. R suit une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,015$.
2. $P(R = 2) \simeq 0,253$. La probabilité d'avoir exactement 2 étuis présentant un défaut de rigidité dans un lot est de 0,253.
3. $P(R > 5) = 1 - P(R \leq 5) \simeq 0,004$ donc on peut affirmer que la probabilité qu'un lot de 100 étuis prélevés dans la production comporte plus de 5 étuis présentant un défaut de rigidité est inférieure à 0,02.

Partie C : Étude des délais de livraison

1. $P(0 \leqslant D \leqslant 15) = \displaystyle\int_0^{15} \dfrac{1}{8}\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\,\mathrm{d}t = \left[-\mathrm{e}^{-\frac{1}{8}t}\right]_0^{15} = -\mathrm{e}^{-\frac{15}{8}} + \mathrm{e}^0 = 1 - \mathrm{e}^{-\frac{15}{8}} \simeq 0,847$.

2. **a.** Calculons la dérivée de G :
$-te^{-\frac{1}{8}t}$ est de la forme uv avec $u(t) = -t$ et $v(t) = e^{-\frac{1}{8}t}$.
Ainsi $G'(t) = u'(t)v(t) + u(t)v'(t) - \left(8e^{-\frac{1}{8}t}\right)'$ avec $u'(t) = -1$ et $v'(t) = -\dfrac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}t}$.
On a alors : $G'(t) = -e^{-\frac{1}{8}t} + \dfrac{1}{8}te^{-\frac{1}{8}t} + 8 \times \dfrac{1}{8}e^{-\frac{1}{8}t} = -e^{-\frac{1}{8}t} + \dfrac{1}{8}te^{-\frac{1}{8}t} + e^{-\frac{1}{8}t} = \dfrac{1}{8}te^{-\frac{1}{8}t}$

Donc la fonction G est une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{8}te^{-\frac{1}{8}t}$.

b. $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{8}te^{-\frac{1}{8}t}\,\mathrm{d}t = [G(t)]_0^x = G(x) - G(0) = -xe^{-\frac{1}{8}x} - 8e^{-\frac{1}{8}x} - (0 - 8e^0) = -xe^{-\frac{1}{8}x} - 8e^{-\frac{1}{8}x} + 8$

3. **a.** On a : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} xe^{-x} = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} e^{-x} = 0$ donc $E(D) = 8$.

b. En moyenne, le client attendra 8 jours entre la commande et la livraison.

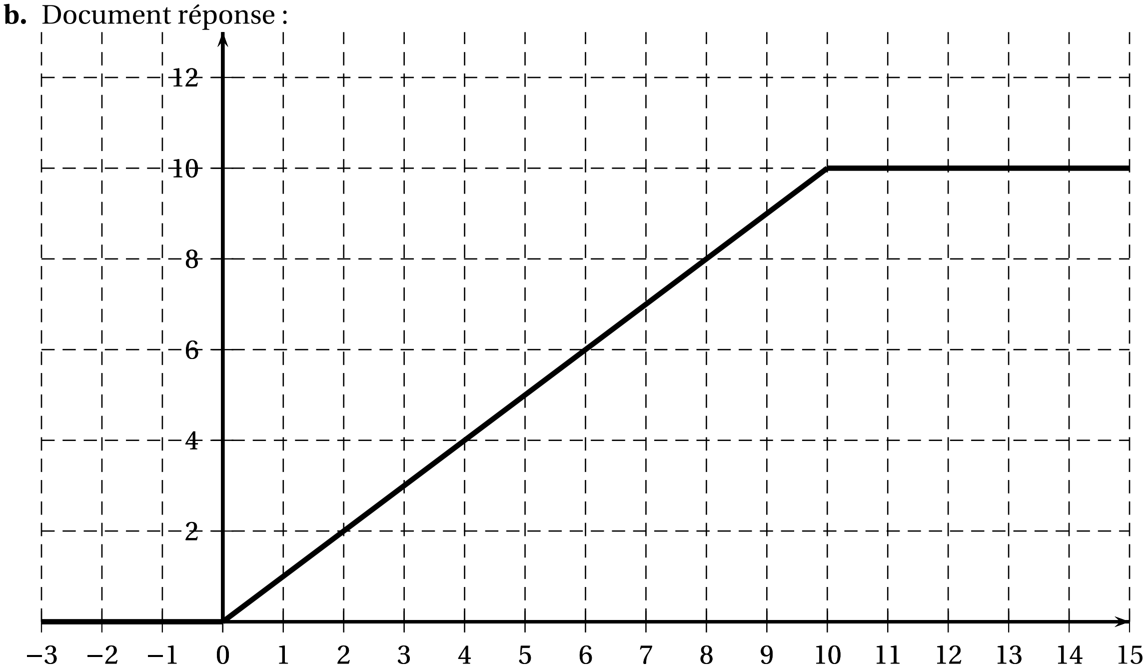
Exercice 3 **7 points**

1. a. Tableau de valeurs de e :

t	$-\infty$	0	10 $+\infty$
$t\mathscr{U}(t)$	0	t	t
$(t-10)\mathscr{U}(t-10)$	0	0	t-10
$e(t)$	0	t	10

Donc $e(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 0 \\ t & \text{si} \quad 0 \leqslant t < 10 \\ 10 & \text{si} \quad t \geqslant 10 \end{cases}$

b. Document réponse :



2. $E(p) = \mathscr{L}(t\mathscr{U}(t)) - \mathscr{L}((t-10)\mathscr{U}(t-10)) = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-10p}$

Ainsi $S(p) = H(p) \times E(p) = \dfrac{150}{10p+1}\left(\dfrac{1}{p^2} - \dfrac{1}{p^2}\mathrm{e}^{-10p}\right) = \dfrac{150}{p^2(10p+1)} - \dfrac{150}{p^2(10p+1)}\mathrm{e}^{-10p}$.

3. On a : $F(p) = \dfrac{1}{p^2(10p+1)} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{10}{p} + \dfrac{100}{10p+1} = \dfrac{1}{p^2} - \dfrac{10}{p} + \dfrac{10}{p+0,1}$.

Donc $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p^2}\right) - \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{10}{p}\right) + \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{10}{p+0,1}\right) = t\mathscr{U}(t) - 10\mathscr{U}(t) + 10\mathrm{e}^{-0,1t}\mathscr{U}(t)$.

4. a. $s(t) = 150f(t) - 150f(t-10)$
$= 150t\mathscr{U}(t) - 1500\mathscr{U}(t) + 1500\mathrm{e}^{-0,1t}\mathscr{U}(t) - 150(t-10)\mathscr{U}(t-10) + 1500\mathscr{U}(t-10) - 1500\mathrm{e}^{-0,1(t-10)}\mathscr{U}(t-10)$

b. Ainsi, pour $t \geqslant 10$, $s(t) = 150t - 1500 + 1500\mathrm{e}^{-0,1t} - 150(t-10) + 1500 - 1500\mathrm{e}^{-0,1(t-10)}$
$= 150t - 1500 + 1500\mathrm{e}^{-0,1t} - 150t + 1500 + 1500 - 1500\mathrm{e}^{-0,1t+1} = 1500 + 1500\left(\mathrm{e}^{-0,1t} - \mathrm{e}^{-0,1t+1}\right)$.

5. a. La limite de la fonction s lorsque t tend vers $+\infty$ semble être 1500.

b. On a $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,1t} = 0$ donc $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,1t+1} = \lim\limits_{t \to +\infty} \mathrm{e}^{-0,1t} \times \mathrm{e}^{1} = 0$. Ainsi, $\lim\limits_{t \to +\infty} s(t) = 1500 + 1500 \times 0 = 1500$.

c. La vitesse du moteur se stabilise à 1500 tours par minute au bout d'un certain temps.