

Corrigé du BTS Métropole 17 mai 2023

Services informatiques aux organisations

Épreuve obligatoire

Exercice 1

5 points

Question 1. On considère le nombre 2023 écrit en base dix.
Son écriture en base seize est

A : E67	B : 7E7	C : 6E7
---------	---------	---------

$$2023 = 7 \times 256 + 14 \times 16 + 7 = 7E7_{16}$$

Réponse B

Question 2. On considère les nombres, écrits en base deux, 1010_2 et 1011_2 . La somme écrite en base deux de ces nombres est égale à

A : 1111 ₂	B : 10011 ₂	C : 10101 ₂
-----------------------	------------------------	------------------------

$$1010_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 = 10 \text{ et } 1011_2 = 1 \times 2^3 + 1 \times 2 + 1 = 11$$

$$10 + 11 = 21 = 16 + 4 + 1 = 1 \times 2^4 + 1 \times 2^2 + 1 = 10101_2$$

Réponse C

Question 3. On considère la relation binaire \mathcal{R} définie sur \mathbb{R} par :

$$x \mathcal{R} y \iff (xy \leq 0 \wedge x \neq y).$$

On a

A : $(-3) \mathcal{R} 3$	B : $(-3) \mathcal{R} (-4)$	C : $(-3) \mathcal{R} (-3)$
--------------------------	-----------------------------	-----------------------------

On peut éliminer les réponses B et C car le produit des deux nombres est strictement positif.

Réponse A

Question 4. La relation binaire \mathcal{R} définie à la question 3 est

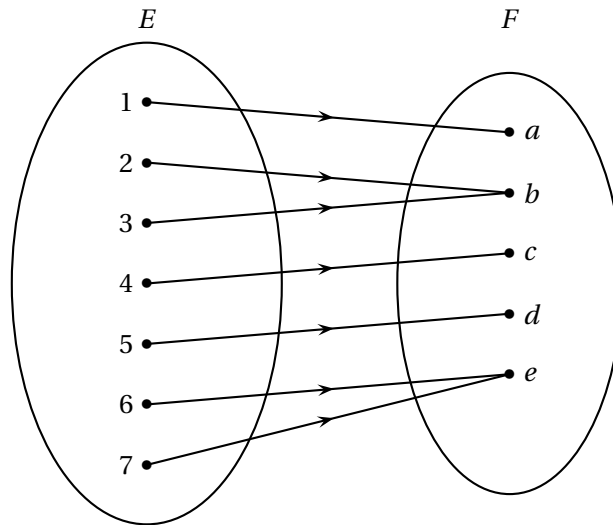
A : réflexive	B : symétrique	C : transitive
---------------	----------------	----------------

$$x \mathcal{R} y \iff (xy \leq 0 \wedge x \neq y) \iff (yx \leq 0 \wedge y \neq x) \iff y \mathcal{R} x$$

Donc la relation \mathcal{R} est symétrique.

Réponse B

Question 5. Une application f d'un ensemble E dans un ensemble F est définie par le diagramme ci-dessous.



L'application ainsi définie est

A : injective et non surjective	B : surjective et non injective	C : bijective
---------------------------------	---------------------------------	---------------

On examine les propriétés :

- $f(2) = f(3) = b$ donc l'application f n'est pas injective.
- Tous les éléments de F ont au moins un antécédent par f dans E , donc l'application f est surjective.

Réponse B

Exercice 2

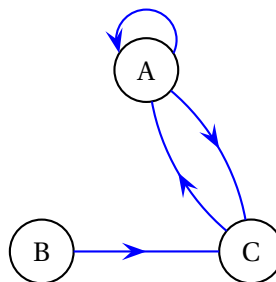
5 points

Partie A

On considère le graphe orienté G comportant 3 sommets notés A, B et C dont la matrice

d'adjacence est P , où $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. On dessine une représentation du graphe G .



2. a.
$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+0+1 & 0+0+0 & 1+0+0 \\ 0+0+1 & 0+0+0 & 0+0+0 \\ 1+0+0 & 0+0+0 & 1+0+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

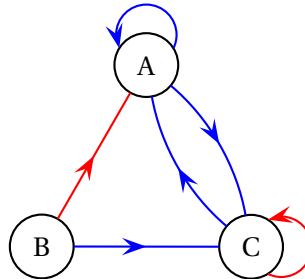
b. La matrice $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donne le nombre de chemins de longueur 2; il n'y en a qu'un partant de B, et il va vers A : c'est le chemin B - C - A.

3. $P^2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P^{[2]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $P^3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ donc $P^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

La matrice de fermeture transitive de ce graphe est $\hat{P} = P \vee P^{[2]} \vee P^{[3]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

S'il y a un 1 à l'intersection de la ligne correspondant au sommet X et de la colonne correspondant au sommet Y, alors il y a un **chemin** allant du sommet X au sommet Y.

Le graphe de la fermeture transitive de G est donc :



Partie B

Dans un graphe orienté, on définit :

- le **degré entrant** d'un sommet comme étant le nombre d'arcs menant à ce sommet.
- le **degré sortant** d'un sommet comme étant le nombre d'arcs issus de ce sommet.

1.
 - a. Le degré entrant du sommet C du graphe G défini dans la partie A est 2; c'est la somme des nombres situés sur la 3^e colonne de P.
 - b. Le degré sortant du sommet C du graphe G défini dans la partie A est 1 : c'est la somme des nombres situés sur la 3^e ligne de P.
2. On étudie dans cette question les graphes orientés à trois sommets numérotés de 1 à 3. On considère l'algorithme ci-dessous écrit en langage naturel où Degré_sortant désigne une fonction de paramètres M et s, M étant une matrice à 3 lignes et 3 colonnes et s un entier compris entre 1 et 3. Le coefficient de la matrice M situé ligne i colonne j est noté m_{ij} .

On complète cet algorithme pour que la fonction renvoie le degré sortant du sommet numéroté s dans un graphe dont la matrice d'adjacence est M.

Fonction Degré_sortant (M, s)
 deg \leftarrow 0
 Pour j allant de 1 à 3 **Faire**
 Si $m_{sj} > 0$ **Faire**
 deg \leftarrow deg + 1
 Fin de Si
Fin de Pour
Retourner deg

Exercice 3**10 points**

Une entreprise décide de mettre en place une authentification à plusieurs étapes permettant à ses employés d'accéder aux services en ligne qu'elle propose.

Partie A

La première authentification consiste à utiliser un mot de passe.

À la première connexion, l'utilisateur doit créer un mot de passe de 8 à 16 caractères. Ces caractères peuvent être des lettres majuscules de l'alphabet ou des chiffres ou des caractères spéciaux (?, &, etc.).

Pour être valide, un mot de passe doit remplir au moins l'une des trois conditions suivantes :

- il contient au moins trois chiffres et au moins deux caractères spéciaux;
- il contient moins de trois chiffres, au moins deux caractères spéciaux et au moins dix lettres;
- il contient moins de deux caractères spéciaux et au moins dix lettres.

1.
 - Le mot de passe ABCDABCD?# contient deux caractères spéciaux mais il ne contient ni trois chiffres, ni au moins dix lettres; il n'est donc pas valide.
 - Le mot de passe STU27ABCABCDE& contient deux caractères spéciaux et onze lettres donc il est valide.

On définit les variables booléennes a , b et c de la manière suivante :

- a lorsque le mot de passe contient au moins trois chiffres, \bar{a} sinon;
 - b lorsque le mot de passe contient au moins deux caractères spéciaux, \bar{b} sinon;
 - c lorsque le mot de passe contient au moins dix lettres, \bar{c} sinon.
2.
 - a. On appelle E l'expression booléenne qui traduit la validité d'un mot de passe.
 - Le mot de passe « contient au moins trois chiffres et au moins deux caractères spéciaux » se traduit en $a.b$;
 - Le « ou » se traduit en +;
 - Le mot de passe « contient moins de trois chiffres, au moins deux caractères spéciaux et au moins dix lettres » se traduit en $\bar{a}.b.c$;
 - Le « ou » se traduit en +;
 - Le mot de passe « contient moins de deux caractères spéciaux et au moins dix lettres » se traduit en $\bar{b}.c$.

$$\text{Donc } E = a.b + \bar{a}.b.c + \bar{b}.c.$$

- b. On représente l'expression E dans un tableau de Karnaugh.

		$a.b$			
	bc	00	01	11	10
a	0				
a	1			1	1

		$\overline{a}.b.c$			
	bc	00	01	11	10
a	0			1	
a	1				

		$\overline{b}.c$			
	bc	00	01	11	10
a	0		1		
a	1		1		

$$E = a.b + \overline{a}.b.c + \overline{b}.c$$

	bc	00	01	11	10
a	0		1	1	
a	1		1	1	1

On en déduit une écriture simplifiée de l'expression booléenne E sous la forme d'une somme de deux termes.

	bc	00	01	11	10
a	0		1	1	
a	1		1	1	1

c

$a.b$

Donc $E = a.b + c$.

- c. L'expression simplifiée de E est « le mot de passe contient au moins trois chiffres et au moins trois caractères spéciaux, ou au moins dix lettres »

3. Le tableau de Karnaugh correspondant à \overline{E} est :

	bc	00	01	11	10
a	0	1			1
a	1	1			

$\overline{b}.c$

$\overline{a}.c$

$$\overline{E} = \overline{a}.c + \overline{b}.c$$

Partie B

Pour la seconde authentification, le serveur de l'entreprise envoie à l'utilisateur un mot de passe codé qu'il devra décoder.

Le serveur de l'entreprise code un mot de passe de la façon suivante :

- à chaque lettre de l'alphabet, on associe son rang x selon le tableau ci-dessous

Lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
Rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Lettre	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
Code	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

- on fixe une clé $(a; b)$, où a et b sont deux entiers naturels compris entre 0 et 25;
- on calcule le reste y de la division de $ax + b$ par 26; on détermine ainsi le plus petit entier naturel y vérifiant $y \equiv ax + b [26]$;
- on cherche ensuite la lettre de l'alphabet dont le rang est y ;
- cette lettre code la lettre donnée au départ.

1. Le serveur de l'entreprise utilise la clé $(9; 15)$.

- a. La lettre C a pour rang $x = 2$. Donc $ax + b = 9 \times 2 + 15 = 33$ qui a pour reste $y = 7$ dans la division par 26. Le rang 7 correspond à la lettre H donc C est codée H.
- b. La lettre E a pour rang $x = 4$. Donc $ax + b = 9 \times 4 + 15 = 51$ qui a pour reste $y = 25$ dans la division par 26. Le rang 25 correspond à la lettre Z donc E est codée Z.

2. L'utilisateur veut décoder la lettre V associée à l'entier $y = 21$. Pour cela il doit déterminer le plus petit entier naturel x vérifiant $21 \equiv 9x + 15 [26]$.

- a. $9 \times 3 = 27 \equiv 1 [27]$.
- b. Si $21 \equiv 9x + 15 [26]$ alors $3 \times 21 \equiv 3 \times (9x + 15) [26]$ soit $63 \equiv 27x + 45 [26]$ qui donne $18 \equiv 27x [26]$ ou encore, puisque $27 \equiv 1 [26]$, on a $18 \equiv x [26]$.
Donc $21 \equiv 9x + 15 [26]$ alors $x \equiv 18 [26]$.
- c. La lettre V correspond au rang $y = 21$. On cherche x tel que $21 \equiv 9x + 15 [26]$. D'après la question précédente, on obtient $x = 18$, qui est le rang de la lettre S.
Donc la lettre V se décode en S.