Corrigé du BTS Polynésie mai 2021 – Épreuve obligatoire
Services informatiques aux organisations

Exercice 1 **15 points**

Partie A

Une entreprise utilise depuis 2005 pour son parc informatique, un système d'exploitation personnalisé. En 2005, ce système d'exploitation nécessitait une configuration minimale de 4 méga-octets (Mo) de mémoire vive. Une nouvelle version du système d'exploitation est mise en place chaque année depuis 2005. Et avec chaque nouvelle version (donc chaque année), la configuration minimale en mémoire vive augmente de 34 %.

On note u_n la configuration minimale en mémoire vive requise par le système d'exploitation, exprimée en méga-octets, en $2005+n$. Ainsi $u_0 = 4$.

1. $u_1 = u_0 + u_0 \times \dfrac{34}{100} = u_0 \times \left(1+\dfrac{34}{100}\right) = 4 \times 1{,}34 = 5{,}36$

   $u_2 = u_1 + u_1 \times \dfrac{34}{100} = u_1 \times \left(1+\dfrac{34}{100}\right) = 5{,}36 \times 1{,}34 = 7{,}1824$
2. Ajouter 34 %, c'est multiplier par $1+\dfrac{34}{100}$ soit 1,34.

   Donc la suite (u_n) est géométrique de raison 1,34.
3. La suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}34$ et de premier terme $u_0 = 4$ donc pour tout n, on a : $u_n = u_0 \times q^n = 4 \times 1{,}34^n$.
4. $u_{10} = 4 \times 1{,}34^{10} \approx 75$

   Donc en $2005+10$, soit en 2015, la configuration minimale en mémoire vive requise par le système d'exploitation doit être de 75 Mo.
5. La configuration minimale en mémoire vive requise par le système dépasse le giga-octets (c'est-à-dire 1 000 méga-octets) quand $u_n > 1000$. On résout cette inéquation.

   $$u_n > 1000 \iff 4 \times 1{,}34^n > 1000 \iff 1{,}34^n > 250 \iff \ln\left(1{,}34^n\right) > \ln(250)$$
   $$\iff n \times \ln(1{,}34) > \ln(250) \iff n > \dfrac{\ln(250)}{\ln(1{,}34}$$

   Or $\dfrac{\ln(250)}{\ln(1{,}34} \approx 18{,}9$, donc c'est au bout de 19 ans, soit en 2024, que la configuration minimale en mémoire vive requise sera supérieure à 1 Go.

Partie B

L'entreprise veut ouvrir un nouvel espace de bureaux dans ses locaux. Pour cela, elle désire acheter de nouveaux ordinateurs et essaye de déterminer le modèle adapté. Ce modèle doit satisfaire au moins l'un des critères suivants :

- le modèle doit disposer de 16 giga-octets (Go) ou plus de mémoire vive et d'un disque dur d'un minimum de un téra-octet (To) ;
- le disque dur du modèle a une capacité inférieure à 1 To, mais le modèle dispose d'un disque SSD ;
- le modèle ne dispose pas d'un disque SSD et a un disque dur de moins de 1 To mais possède 16 Go ou plus de mémoire vive ;
- le modèle possède un disque SSD et un disque dur d'une mémoire supérieure à 1 To.

On définit les variables booléennes suivantes :

- $a = 1$ si le modèle possède une mémoire vive de 16 Go ou plus, $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ si le modèle possède un disque dur de 1 To ou plus, $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si le modèle possède un disque SSD, $c = 0$ sinon.

1. Soit (E) l'expression booléenne traduisant les critères de sélection d'un modèle.

On traduit chaque critère au moyen des variables booléennes données ; le « et » se traduit par un produit, et le « ou » par une somme.

- le modèle doit disposer de 16 giga-octets (Go) ou plus de mémoire vive et d'un disque dur d'un minimum de un téra-octet (To) : $(a.b)$;
- ou : $(+)$;
- le disque dur du modèle a une capacité inférieure à 1 To, mais le modèle dispose d'un disque SSD : $(\overline{b}.c)$;
- ou : $(+)$;
- le modèle ne dispose pas d'un disque SSD et a un disque dur de moins de 1 To mais possède 16 Go ou plus de mémoire vive : $(a.\overline{b}.\overline{c})$;
- ou : $(+)$;
- le modèle possède un disque SSD et un disque dur d'une mémoire supérieure à 1 To : $(b.c)$

Donc $E = a.b + \overline{b}.c + a.\overline{b}.\overline{c} + b.c$.

2. On représente l'expression E dans un tableau de Karnaugh.

$a.b$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			1	1

$\overline{b}.c$

a \ bc	00	01	11	10
0		1		
1		1		

$a.\overline{b}.\overline{c}$

a \ bc	00	01	11	10
0				
1	1			

$b.c$

a \ bc	00	01	11	10
0			1	
1			1	

$$E = a.b + \overline{b}.c + a.\overline{b}.\overline{c} + b.c$$

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1	1	1

On en déduit une écriture simplifiée de l'expression booléenne sous la forme d'une somme de deux termes.

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	
1	1	1	1	1

a

c

Donc $F = a + c$.

3. L'expression booléenne F se traduit par : « Le modèle possède une mémoire vive de 16 Go ou plus, ou le modèle possède un disque SSD. »

Partie C

Pour créer le nouvel espace de bureaux, plusieurs tâches doivent être réalisées. Leurs caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-après.

Tâche	Description	Durée en jours	Tâche à réaliser au préalable
A	Choix des ordinateurs	1	–
B	Commande des ordinateurs et attente de la livraison	7	A
C	Pose des câbles et prises	2	–
D	Peinture de la salle	3	C
E	Commande des meubles (tables et chaises) et attente de la livraison	5	–
F	Installation des tables et ordinateurs dans la salle	1	B, D, E
G	Installation du système d'exploitation et configuration des ordinateurs	2	F
H	Mise en place des chaises	1	E

Le but de cet exercice est de réaliser le graphe d'ordonnancement du projet.

1. On détermine le niveau de chacun des sommets dans le graphe.

On part du tableau des prédécesseurs.

On cherche les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de A, de C et de E.

Les sommets A, C et E sont donc de niveau 0.

Sommets	Prédécesseurs
A	–
B	A
C	–
D	C
E	–
F	B - D - E
G	F
H	E

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 0, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de B, D et H.

Les sommets B, D et H sont donc de niveau 1.

Sommets	Prédécesseurs
~~A~~	–
B	~~A~~
~~C~~	–
D	~~C~~
~~E~~	–
F	B - D - ~~E~~
G	F
H	~~E~~

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 1, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de F.

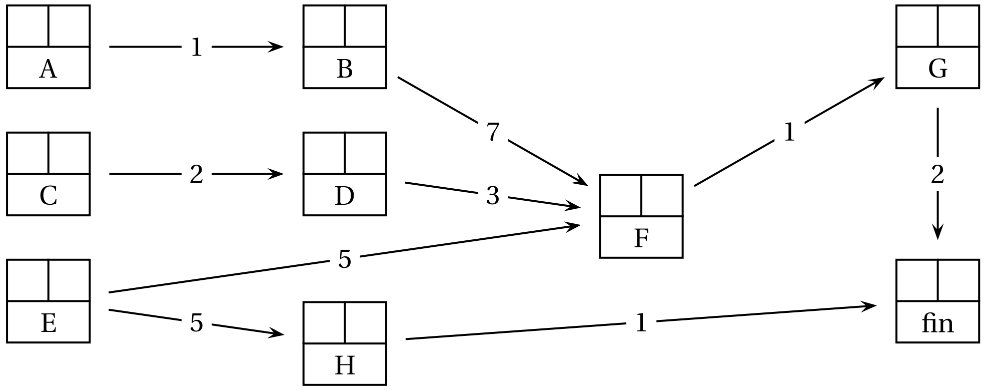
Le sommet F est donc de niveau 2.

Il reste le sommet G qui est donc de niveau 3.

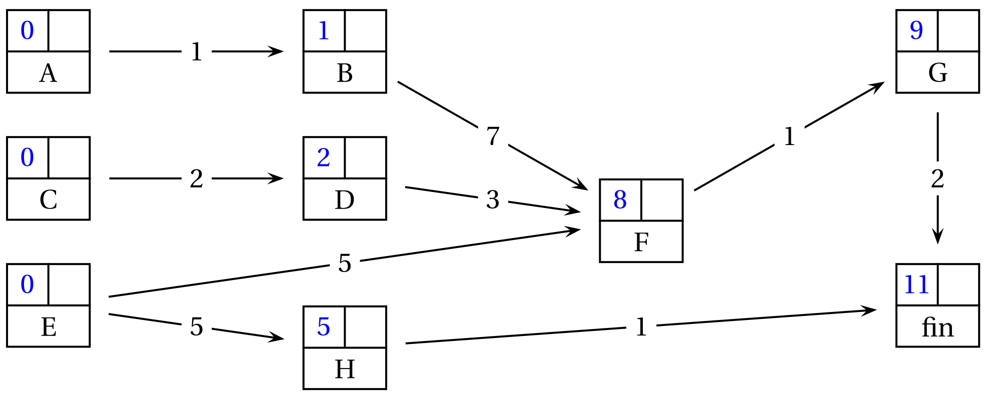
Sommets	Prédécesseurs
~~A~~	–
~~B~~	~~A~~
~~C~~	–
~~D~~	~~C~~
~~E~~	–
F	~~B~~ - ~~D~~ - ~~E~~
G	F
~~H~~	~~E~~

Niveaux	0	1	2	3
Sommets	A - C - E	B - D - H	F	G

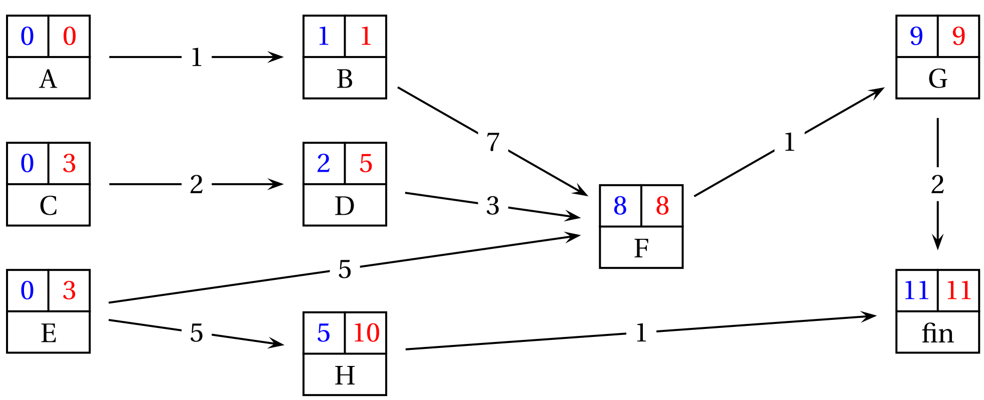
2. On construit le graphe d'ordonnancement du projet selon la méthode M. P. M.



Pour déterminer pour chaque tâche la « date au plus tôt », on traite les sommets par niveaux en partant du début. Puis pour chaque sommet, on note la date qui est la longueur du plus **long** chemin depuis le début.

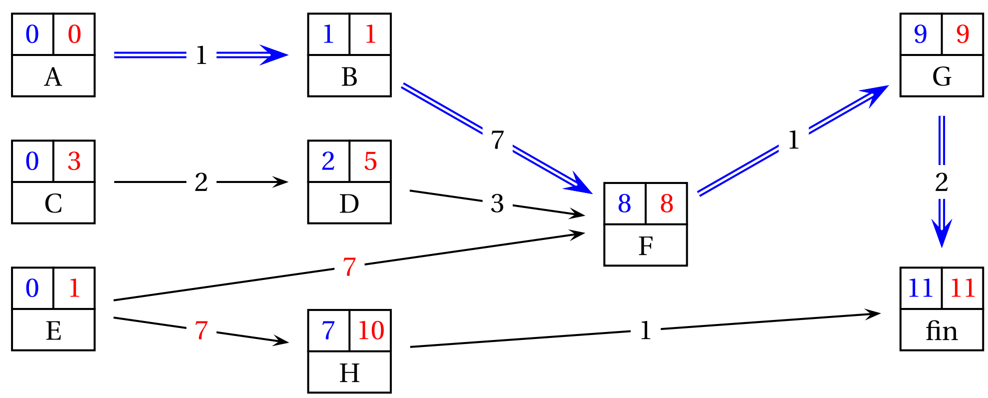


Pour déterminer pour chaque tâche la « date au plus tard », on traite les sommets par niveaux en partant de la fin et en marquant 11 pour le sommet « fin ». La date « au plus tard » d'une tâche s'obtient en retirant de la date au plus tard de la tâche qui lui succède sa propre durée. S'il y a plusieurs successeurs, on garde la date la plus **petite**.



3. D'après le graphe précédent, la durée minimale du projet est de 11 jours
4. Le chemin critique du graphe d'ordonnancement est : A – B – F – G
5. Le fournisseur de meuble a mal géré ses stocks. La livraison des tables et des chaises aura 2 jours de retard.

   Voici donc le nouveau graphe d'ordonnancement en supposant que la tâche E dure 7 jours au lieu de 5 jours.



   Le chemin critique (en bleu) n'est pas modifié par ce retard, donc il n'a aucune incidence sur le projet.

Exercice 2 — 5 points

Dans cet exercice, on s'intéresse à un réseau social. Les comptes du réseau social sont répartis en trois types :

- le type a regroupe les comptes ayant entre 0 et 20 000 abonnés ;
- le type b regroupe les comptes ayant entre 20 000 et 200 000 abonnés ;
- le type c regroupe les comptes ayant plus de 200 000 abonnés.

Pour fidéliser les comptes ayant le plus d'abonnés, le réseau social leur attribue une prime annuelle. Cette prime est financée par des annonces publicitaires. Le nombre d'annonces publicitaires publiées sur la page d'un compte dépend de son type. De plus, le réseau social sponsorise chaque année les projets des comptes ayant le plus d'abonnés.

Les données relatives aux différents types de comptes sont résumées dans le tableau :

	Type a	Type b	Type c
Prime annuelle (en euros)	0	510	1 200
Nombre d'annonces publicitaires	1	2	5
Nombre de projets sponsorisés chaque année	0	1	2

En 2018, il y avait 1 928 340 comptes de type a, 1 220 comptes de type b et 246 comptes de type c.

Soit les matrices : $A = \begin{pmatrix} 0 & 510 & 1\,200 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1\,928\,340 \\ 1\,220 \\ 246 \end{pmatrix}$ et $C = \dfrac{1}{180}\begin{pmatrix} -1 & 180 & 150 \\ -2 & 0 & 1\,200 \\ 1 & 0 & -510 \end{pmatrix}$

1. $A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 510 & 1\,200 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1\,928\,340 \\ 1\,220 \\ 246 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \times 1\,928\,340 + 510 \times 1\,220 + 1\,200 \times 245 \\ 1 \times 1\,928\,340 + 2 \times 1\,220 + 5 \times 245 \\ 0 \times 1\,928\,340 + 1 \times 1\,220 + 2 \times 245 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 917\,400 \\ 1\,932\,010 \\ 1\,712 \end{pmatrix}$

Cela signifie que :

- le total des primes à verser est de 917 400 euros ;
- le nombre total d'annonces publicitaires est de 1 932 010 ;
- le nombre de projetx sponsorisés chaque année est 1 712.

2. **a.** $C \times A = \dfrac{1}{180}\begin{pmatrix} -1 & 180 & 150 \\ -2 & 0 & 1\,200 \\ 1 & 0 & -510 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 510 & 1\,200 \\ 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{180}\begin{pmatrix} -1 \times 0 + 180 \times 1 + 150 \times 0 & -1 \times 510 + 180 \times 2 + 150 \times 1 & -1 \times 1\,200 + 180 \times 5 + 150 \times 2 \\ -2 \times 0 + 0 \times 1 + 1\,200 \times 0 & -2 \times 510 + 0 \times 2 + 1\,200 \times 1 & -2 \times 1\,200 + 0 \times 5 + 1\,200 \times 2 \\ 1 \times 0 + 0 \times 1 + (-510) \times 0 & 1 \times 510 + 0 \times 2 + (-510) \times 1 & 1 \times 1\,200 + 0 \times 5 + (-510) \times 2 \end{pmatrix}$

$= \dfrac{1}{180}\begin{pmatrix} 180 & 0 & 0 \\ 0 & 180 & 0 \\ 0 & 0 & 180 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$ matrice identité 3×3.

b. $A \times X = Y \implies C \times (A \times X) = C \times Y \iff (C \times A) \times X = C \times Y$
$\iff I_3 \times X = C \times Y \iff X = C \times Y$

Donc si $A \times X = Y$, alors $X = C \times Y$.

Pour démontrer que $X = C \times Y$ est solution de l'équation $A \times X = Y$, il faut vérifier aussi que $A \times C = I_3$. Dans ce cas :

$X = C \times Y \implies A \times X = A \times (C \times Y) \iff A \times X = (A \times C) \times Y$
$\iff A \times X = I_3 \times Y \iff A \times X = Y$

Il y a donc équivalence entre $A \times X = Y$ et $X = C \times Y$, donc $X = C \times Y$ est solution de l'équation $A \times X = Y$.

3. En 2019, on suppose que le nombre de comptes est resté constant tout au long de l'année. Cette année-là, le réseau social a distribué 1 197 600 euros de primes, publiait simultanément 2 146 820 annonces publicitaires sur l'ensemble de ses pages et a financé au total 2 200 projets.

Pour déterminer le nombre de comptes de chaque type pour l'année 2019, on cherche une matrice colonne X telle que $A \times X = Y$, où $Y = \begin{pmatrix} 1\,197\,600 \\ 2\,146\,820 \\ 2\,200 \end{pmatrix}$.

D'après la question précédente : $X = C \times Y = \begin{pmatrix} 2\,142\,000 \\ 1\,360 \\ 420 \end{pmatrix}$.

En 2019 il y a donc 2 142 000 comptes de type a, 1 360 comptes de type b, et 420 comptes de type c.