Corrigé du BTS Métropole 16 mai 2025
Services informatiques aux organisations
Épreuve obligatoire

Exercice 1 — 5 points

1. Quel est le codage exact en binaire à virgule fixe du nombre décimal 13,375 ?

A :	B :	C :	D :
1101,110	1101,101	1101,011	Il n'y a pas de codage exact.

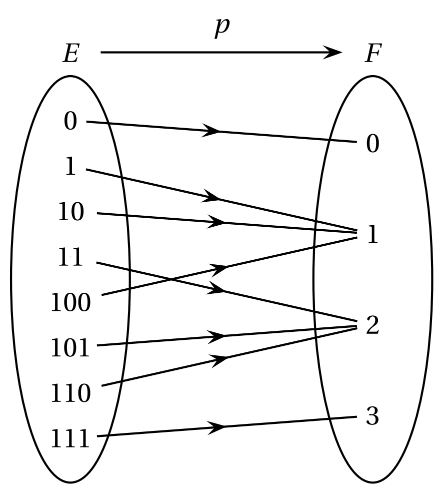
On code séparément la partie entière et la partie décimale du nombre 13,375.

- $13 = 8 + 4 + 1 = 2^3 + 2^2 + 2^0$ donc 13 se code $\overline{1101}^2$.
- $0,375 \times 2 = 0,75$; on garde 0.
  $0,75 \times 2 = 1,5$; on garde 1. De plus : $1,5 - 1 = 0,5$.
  $0,5 \times 2 = 1$; on garde 1. De plus : $1 - 1 = 0$.
  Donc le codage exact de 0,375 est $\overline{0,011}^2$.

Le codage exact de 13,375 est donc $\overline{1101,011}^2$.

Réponse C

Pour les questions 2 et 3 suivantes on considère deux ensembles :
$E = \{0 ; 1 ; 10 ; 11 ; 100 ; 101 ; 110 ; 111\}$ et $F = \{0 ; 1 ; 2 ; 3\}$
ainsi que l'application p de E vers F qui, à tout élément de E associe la somme de ses chiffres.
On représente l'application p de E dans F.



2. Quelle est l'affirmation exacte concernant l'application p ?

A :	B :	C :	D :
L'application p est injective et non surjective.	L'application p est surjective et non injective.	L'application p est bijective.	L'application p n'est ni injective, ni surjective.

On examine la surjectivité et l'injectivité de l'application p.

- Tous les éléments de F ont au moins un antécédent dans l'ensemble E, donc l'application p est surjective.
- Les éléments 1 et 10 de E ont la même image 1 dans l'ensemble F donc l'application p n'est pas injective.

Réponse B

3. Combien d'éléments de E ont pour image 1 ou 3 par l'application p ?

A : 1	B : 2	C : 3	D : 4

On cherche les éléments de E qui ont pour image 1 par p, et ceux qui ont pour image 3 par p.

- Il y a 3 éléments de E qui ont pour image 1 dans F : ce sont 1, 10 et 100.
- Il n'y a qu'un élément de E qui a pour image 3 dans F : c'est 111.

Il y a donc 4 éléments de E qui ont pour image 1 ou 3 par l'application p.

Réponse D

Dans les questions 4 et 5, a, b et c sont trois variables booléennes.

4. Parmi les expressions suivantes indiquer celle qui est une simplification de :

$$b\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,\overline{b}\,\overline{c}$$

A : $\overline{c} + abc$	B : $\overline{a}\,\overline{b} + c$	C : $c + ab\overline{c}$	D : $\overline{a}\,\overline{b} + \overline{c}$

Pour toute variable booléenne x, on sait que : $x + x = x$, $x + \overline{x} = 1$ et $1x = x$.

Donc $b\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,\overline{b}\,\overline{c} = b\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$

$= \left(\overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,c\right) + \left(a\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}\right) + b\,\overline{c} = \overline{a}\,\overline{b}\left(\overline{c} + c\right) + \left(a + \overline{a}\right)\overline{b}\,\overline{c} + b\,\overline{c}$

$= \overline{a}\,\overline{b} + \overline{b}\,\overline{c} + b\,\overline{c} = \overline{a}\,\overline{b} + \left(\overline{b} + b\right)\overline{c} = \overline{a}\,\overline{b} + \overline{c}$

Réponse D

5. Parmi les expressions suivantes indiquer celle qui est une simplification de :

$$\overline{b\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,\overline{b}\,\overline{c}}$$

A : $c + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c}$	B : $ac + \overline{b}\,\overline{c}$	C : $ac + bc$	D : $a\overline{b} + bc$

Pour toutes variables booléennes x et y, on sait que :

$\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{x + y} = \overline{x}\,\overline{y}$ et $\overline{xy} = \overline{x} + \overline{y}$.

$\overline{b\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,\overline{c} + \overline{a}\,\overline{b}\,c + a\,\overline{b}\,\overline{c}} = \overline{\overline{a}\,\overline{b} + \overline{c}} = \left(\overline{\overline{a + b}}\right)\overline{\overline{c}} = (a + b)\,c = ac + bc$

Réponse C

Exercice 2 **5 points**

Un codage affine est une méthode de chiffrement utilisée en cryptographie, qui consiste à remplacer chaque lettre du message en clair par une autre lettre de l'alphabet en utilisant une fonction affine. On associe à chaque lettre de l'alphabet une valeur numérique.
Seules les lettres majuscules sont utilisées dans cet exercice.
Voici le tableau de correspondance des lettres à leur rang.

lettre	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
rang	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

Ensuite, on définit la fonction affine de codage de la lettre de rang n. Soit f la fonction définie pour tout entier n compris entre 0 et 25 par : $f(n) \equiv 7n+5\ [26]$ avec $0 \leqslant f(n) \leqslant 25$.

1. On code les lettres C et T.

- La lettre C a pour rang 2 et $7\times 2+5 = 19 = 0\times 26+19$ donc $19 \equiv 7\times 2+5\ [26]$.
  Comme $0 \leqslant 19 \leqslant 25$, on a $f(2) = 19$ qui est le rang de la lettre T.
  Donc C sera codé par T.
- La lettre T a pour rang 19 et $7\times 19+5 = 138 = 5\times 26+8$ donc $8 \equiv 7\times 19+5\ [26]$.
  Comme $0 \leqslant 8 \leqslant 25$, on a $f(19) = 8$ qui est le rang de la lettre I.
  Donc T sera codé par I.

2. Pour calculer le reste de la division euclidienne d'un entier N par 26, il suffit de soustraire 26 à N autant de fois que possible, c'est-à-dire tant que la différence demeure supérieure ou égale à 26.

La fonction « `reste_division_par_26` » de paramètre `N`, ci-après, est écrite en langage naturel et emploie cette méthode pour renvoyer le reste de la division euclidienne de `N` par 26.

On complète les deux lignes contenant des pointillés de cette fonction.

```
Fonction reste_division_par_26(N)
    Tant que N >= 26 Faire
        N← N-26
    Fin de Tant que
    Renvoyer (N)
Fin de la fonction
```

3. La fonction `indice (lettre, chaine)` ci-dessous, renvoie le plus petit indice du caractère « `lettre` »dans la chaîne de caractères « `chaine` », lorsqu'il est présent dans « `chaine` », et elle renvoie le nombre de caractères de « `chaine` » sinon.

La documentation de cette fonction précise que :

- `k` est un entier.
- `lettre` est une chaîne de caractères constituée d'un seul caractère.
- `chaine` est une chaîne de caractères.
- `longueur(chaine)` renvoie le nombre de caractères de `chaine`.

```
Fonction indice(lettre, chaine)
    k ← 0
    Tant que k < longueur(chaine) et lettre ≠ chaine[k] Faire
        k ← k + 1
    Fin de Tant que
    Renvoyer (k)
Fin de Fonction
```

a. La fonction va chercher la lettre `A` dans la chaine de caractères `BTSSIO`.

La lettre n'est pas dans la `chaine`, donc la boucle va tourner jusqu'à la fin de la chaine de caractères; la valeur renvoyée par la fonction `indice` est donc le nombre de caractères de la chaine, soit 6.

b. On a complété en bleu la ligne contenant les pointillés de la fonction `indice`.

Exercice 3 — 10 points

Partie A

Les étudiants d'une classe de BTS SIO doivent fabriquer avec une imprimante 3D trois pièces : un boîtier, son couvercle ainsi qu'un support mural. Ces trois pièces seront respectivement désignées dans la suite du sujet par la pièce P_1, la pièce P_2 et la pièce P_3. Le projet de conception et de fabrication des prototypes de ces trois pièces est détaillé dans le tableau ci-dessous :

Tâches	Description	Durées en min	Prédécesseurs
A	Création du fichier `.stl` de la pièce P_1.	120	Aucun
B	Création du fichier `.stl` de la pièce P_2.	75	Aucun
C	Création du fichier `.stl` de la pièce P_3.	150	Aucun
D	Paramétrage de l'impression des 3 pièces.	25	A, B, C
E	Impression des pièces P_1 et P_2.	128	D
F	Finition de la pièce P_1.	15	E
G	Finition de la pièce P_2.	5	E
H	Impression de la pièce P_3.	103	D
I	Finition de la pièce P_3.	15	H

1. **a.** Les tâches F et G ont pour prédécesseur la tâche E, donc la tâche E a pour successeurs les tâches F et G.

b. On admet que le graphe associé à ce projet peut être ordonnancé.
On détermine le niveau de chaque tâche.

On part du tableau des prédécesseurs.

On cherche les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de A, de B et de C.

Les sommets A, B et C sont donc de niveau 0.

Sommets	Prédécesseurs
A	
B	
C	
D	A - B - C
E	D
F	E
G	E
H	D
I	H

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 0, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de D.

Le sommet D est donc de niveau 1.

Sommets	Prédécesseurs
~~A~~	
~~B~~	
~~C~~	
D	~~A~~ - ~~B~~ - ~~C~~
E	D
F	E
G	E
H	D
I	H

On supprime dans le tableau les sommets de niveau 1, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de E et H.

Les sommets E et H sont donc de niveau 2.

Sommets	Prédécesseurs
~~A~~	
~~B~~	
~~C~~	
~~D~~	~~A~~ - ~~B~~ - ~~C~~
E	~~D~~
F	E
G	E
H	~~D~~
I	H

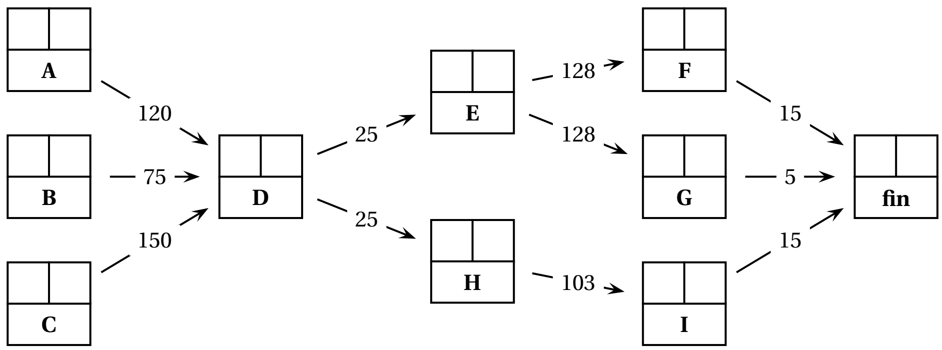
On supprime dans le tableau les sommets de niveau 2, puis on cherche dans le nouveau tableau les sommets qui n'ont pas de prédécesseur ; il s'agit de F, G et I.

Les sommets F, G et I sont donc de niveau 3.

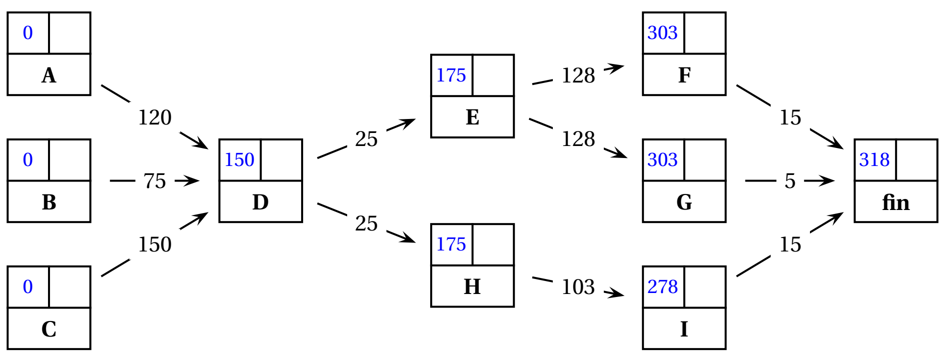
Sommets	Prédécesseurs
~~A~~	
~~B~~	
~~C~~	
~~D~~	~~A~~ - ~~B~~ - ~~C~~
~~E~~	~~D~~
F	~~E~~
G	~~E~~
~~H~~	~~D~~
I	~~H~~

Niveaux	0	1	2	3
Sommets	A - B - C	D	E - H	F - G - I

2. **a.** On construit par étapes le graphe d'ordonnancement du projet (M. P. M.); pour cela on construit le graphe par niveaux en rajoutant une tâche fictive « fin ».



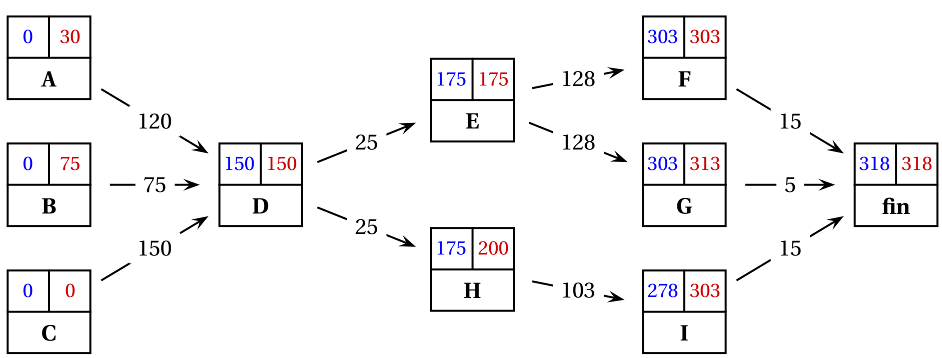
Pour déterminer pour chaque tâche la « date au plus tôt », on traite les sommets par niveaux en partant du début. Puis pour chaque sommet, on note la date qui est la longueur du plus **long** chemin depuis le début.



Ce graphe donne la durée minimale du projet qui est de 318 minutes.

Pour déterminer pour chaque tâche la « date au plus tard », on traite les sommets par niveaux en partant de la fin et en marquant 318 pour le sommet « fin ». La date « au plus tard » d'une tâche s'obtient en retirant de la date au plus tard de la tâche qui lui succède sa propre durée.

S'il y a plusieurs successeurs, on garde la date la plus **petite**.



b. La durée prévisionnelle du projet est de 318 minutes, soit 5 heures et 18 minutes.

3. **a.** La marge totale d'une tâche est la différence entre sa date au plus tard et sa date au plus tôt. On calcule la marge totale de chaque tâche.

Tâche	A	B	C	D	E	F	G	H	I
Marge totale	30	75	0	0	0	0	10	25	25

b. Le chemin critique est donc : C → D → E → F.

c. La tâche qui peut prendre le plus de retard, sans retarder la date prévisionnelle de la fin de projet est la tâche qui a la plus grande marge totale, donc c'est B.

La durée maximale du retard admissible pour cette tâche est égale à sa marge totale donc elle est de 75 minutes.

Partie B

Les étudiants fabriquent ensuite trois séries de pièces. Ils disposent du bilan des coûts des différentes fabrications et souhaitent connaître le prix unitaire de chaque pièce P_1, P_2 et P_3.

Série 1 : la fabrication d'une pièce P_1, d'une pièce P_2 et d'une pièce P_3 a coûté 24 €.

Série 2 : la fabrication de deux pièces P_1 et de deux pièces P_3 a coûté 40 €.

Série 3 : la fabrication d'une pièce P_1 et de trois pièces P_2 a coûté 18 €.

On notera : x le coût de fabrication d'une pièce P_1, exprimé en euro.
y le coût de fabrication d'une pièce P_2, exprimé en euro.
z le coût de fabrication d'une pièce P_3, exprimé en euro.

1. D'après le texte, le système d'équations (S), d'inconnues x, y et z, permettant de traduire les coûts de fabrication des trois séries est : $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 24\\ 2x & & & + & 2z & = & 40\\ x & + & 3y & & & = & 18\end{array}\right.$

Pour la suite de cette partie, on notera : $M = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}$ $\quad X = \begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$ $\quad$ et $\quad P = \begin{pmatrix}24\\ 40\\ 18\end{pmatrix}$.

On admet que le système (S) peut se traduire matriciellement par l'égalité $M \times X = P$.

2. On pose $N = \begin{pmatrix}-3 & 1{,}5 & 1\\ 1 & -0{,}5 & 0\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

a.
$$\begin{aligned} N \times M &= \begin{pmatrix}-3 & 1{,}5 & 1\\ 1 & -0{,}5 & 0\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 2\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-3\times 1+1{,}5\times 2+1\times 1 & -3\times 1+1{,}5\times 0+1\times 3 & -3\times 1+1{,}5\times 2+1\times 0\\ 1\times 1-0{,}5\times 2+0\times 1 & 1\times 1-0{,}5\times 0+0\times 3 & 1\times 1-0{,}5\times 2+0\times 0\\ 3\times 1-1\times 2-1\times 1 & 3\times 1-1\times 0-1\times 3 & 3\times 1-1\times 2-1\times 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = I\end{aligned}$$

On en déduit que N est la matrice inverse de M.

b. Si $M \times X = P$, alors $N \times M \times X = N \times P$, donc $I \times X = N \times P$, et donc $X = N \times P$.

c. $N \times P = \begin{pmatrix} -3 & 1,5 & 1 \\ 1 & -0,5 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 24 \\ 40 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \times 24 + 1,5 \times 40 + 1 \times 18 \\ 1 \times 24 - 0,5 \times 40 + 0 \times 18 \\ 3 \times 24 - 1 \times 40 - 1 \times 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$

Donc $X == \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$ ce qui veut dire : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 14 \end{pmatrix}$ et donc : $\left\{ \begin{array}{rcr} x & = & 6 \\ y & = & 4 \\ z & = & 14 \end{array} \right.$

Donc le coût de fabrication d'une pièce P_1 est de 6 € ;
le coût de fabrication d'une pièce P_2 est de 4 € ;
le coût de fabrication d'une pièce P_3 est de 14 €.