Corrigé du BTS Services Informatiques aux Organisations
Épreuve obligatoire - Polynésie juin 2018

Exercice 1 — 4 points

Question 1

On définit l'application $f : \mathbf{N} \to \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 ; 7 ; 8 ; 9\}$ qui, à un entier n, associe son chiffre des unités en base 10.

Affirmation A : l'application f est bijective.

Affirmation B : l'application f est injective mais non surjective.

Affirmation C : $\boxed{\text{l'application } f \text{ est surjective mais non injective.}}$

Affirmation D : l'application f n'est ni injective ni surjective.

> Tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un antécédent donc l'application f est surjective.
> Les nombres 213 et 9873 ont la même image 3 donc l'application f n'est pas injective.

Question 2

On considère un graphe orienté de sommets E, F, G, H, dont la matrice d'adjacence est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Affirmation A : le sommet F a exactement 2 successeurs.

Affirmation B : $\boxed{\text{le sommet F a exactement 2 prédécesseurs.}}$

Affirmation C : le graphe comprend exactement 11 chemins de longueur 2.

Affirmation D : le graphe ne contient aucun circuit.

> Le sommet F a pour prédécesseurs les sommets F et H (voir 2$^{\text{e}}$ colonne de la matrice).

Question 3

Les chiffres en base 16 sont notés : 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F.
On considère un entier X dont l'écriture en base seize est : $X = \text{BC7}_{16}$.

Affirmation A : $\boxed{\text{en base dix, l'entier } X \text{ s'écrit } X = 3015_{10}.}$

Affirmation B : en base dix, l'entier X s'écrit $X = 2018_{10}$.

Affirmation C : en base dix, l'entier X s'écrit $X = 11127_{10}$.

Affirmation D : en base dix, l'entier X s'écrit $X = 1995_{10}$.

> $X = \text{BC7}_{16}$ s'écrit en base 10 : $X = 11 \times 16^2 + 12 \times 16 + 7 = 3015$.

Question 4

On considère la relation $\mathscr{R}$ définie sur $\mathbf{N}^*$ par : « $m \mathscr{R} n \iff m$ divise n » .

Affirmation A : $\boxed{\text{la relation } \mathscr{R} \text{ est réflexive et transitive.}}$

Affirmation B : la relation $\mathscr{R}$ est symétrique et transitive.

Affirmation C : la relation $\mathscr{R}$ est réflexive et symétrique.

Affirmation D : la relation $\mathscr{R}$ est une relation d'équivalence.

> « m divise m » donc la relation $\mathcal{R}$ est réflexive.
> Si « m divise n » et « n divise p », alors « m divise p », donc la relation $\mathcal{R}$ est transitive.

Exercice 2 — 11 points

Partie A

Une société de fabrication et d'installation de fibre optique a besoin de recruter un informaticien, femme ou homme. La direction des ressources humaines considère qu'une candidature est recevable lorsqu'elle satisfait à l'une au moins des conditions suivantes :

- le candidat est âgé de 25 ans ou moins et est titulaire du BTS SIO ;
- le candidat est âgé de 25 ans ou moins, n'est pas titulaire du BTS SIO et possède de l'expérience ;
- le candidat est âgé de strictement plus de 25 ans et est titulaire du BTS SIO ;

On définit les variables booléennes a, b, c de la façon suivante :

- $a = 1$ si le candidat est âgé de strictement plus de 25 ans, $a = 0$ sinon ;
- $b = 1$ si le candidat est titulaire d'un BTS SIO, $b = 0$ sinon ;
- $c = 1$ si le candidat a de l'expérience, $c = 0$ sinon.

1. On cherche une expression booléenne E traduisant qu'une candidature est recevable.

- « le candidat est âgé de 25 ans ou moins et est titulaire du BTS SIO » correspond à $\overline{a}\,b$;
- « le candidat est âgé de 25 ans ou moins, n'est pas titulaire du BTS SIO et possède de l'expérience » correspond à $\overline{a}\ \overline{b}\,c$;
- « le candidat est âgé de strictement plus de 25 ans et est titulaire du BTS SIO » correspond à ab.

Donc $E = \overline{a}\,b + \overline{a}\ \overline{b}\,c + ab$.

2. À l'aide de tableaux de Karnaugh, on détermine une écriture simplifiée de E sous la forme d'une somme de deux termes.

$\overline{a}\,b$

a \ bc	00	01	11	10
0			1	1
1				

$\overline{a}\ \overline{b}\,c$

a \ bc	00	01	11	10
0		1		
1				

ab

a \ bc	00	01	11	10
0				
1			1	1

$E = \overline{a}\,b + \overline{a}\ \overline{b}\,c + ab$

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	1
1			1	1

b

$\overline{a}\,c$

Une expression simplifiée d'une candidature recevable est donc $E = b + \overline{a}\,c$.

3. Une candidate a 21 ans, aucune expérience, mais est titulaire du BTS SIO.
   L'expression booléenne correspondant au profil de cette candidate est $\overline{a}\,b\,\overline{c}$ donc elle remplit les critères de recrutement.

4. Pour donner une expression simple de $\overline{E}$, on examine le tableau de Karnaugh ci-dessous qui représente E :

$$E = \overline{a}\,b + \overline{a}\,\overline{b}\,c + ab$$

a \ bc	00	01	11	10
0		1	1	1
1			1	1

$\overline{b}\,\overline{c}$ $\quad a\,\overline{b}$

Par complémentarité, on trouve $\overline{E} = a\,\overline{b} + \overline{b}\,\overline{c}$.

Partie B

La société produit trois types de fibres optiques à partir de silice, forme naturelle du dioxyde de silicium (SiO_2) qui entre dans la composition de nombreux minéraux. Elle produit :

— x pièces du type A, dont le débit supporté vaut 1 gigabit par seconde ;
— y pièces du type B, dont le débit supporté vaut 10 gigabits par seconde ;
— z pièces du type C, dont le débit supporté vaut 100 gigabits par seconde.

Pour une pièce, la masse de silice utilisée et le temps de production de chacun de ces types de fibres sont récapitulés dans le tableau suivant.

Type de fibre	A	B	C
Masse de silice en kg (par pièce)	3	4	7
Temps de production en h (par pièce)	2	3	5

La société modélise cette fabrication afin d'envisager différents scénarios sur une période donnée. Pour cette période, on note N le nombre total de pièces produites, S la masse totale en kg de silice utilisée et H le temps total de production exprimé en heure.

1. • La contrainte sur les quantités s'écrit $x + y + z = N$.
   • La contrainte sur les masses de silice s'écrit $3x + 4y + 7z = S$.
   • La contrainte sur les temps de production s'écrit $2x + 3y + 5z = H$.

   Donc x, y, z vérifient le système $\left\{\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & N \\ 3x & + & 4y & + & 7z & = & S \\ 2x & + & 3y & + & 5z & = & H \end{array}\right.$.

2. On considère les matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} N \\ S \\ H \end{pmatrix}$.

   Le système peut s'écrire $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ S \\ H \end{pmatrix}$ qui équivaut à $M \times X = Y$ où $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

3. Soit $X = \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix}$.

Alors $Y = M \times X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 7 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 10 \\ 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 \\ 310 \\ 220 \end{pmatrix}$.

Il y a donc 60 pièces produites, qui nécessitent 310 kg de silice et 220 heures de travail.

4. On considère la matrice carrée $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a. À la calculatrice, on trouve $P \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice identité d'ordre 3 I_3.

b. Si $M \times X = Y$, alors $P \times M \times X = P \times Y$ donc $I_3 \times X = P \times Y$ donc $X = P \times Y$.

c. Pour une période donnée, l'entreprise dispose de 94 kg de silice et de 67 heures de production.

Elle souhaite fabriquer 21 pièces de fibres, donc $Y = \begin{pmatrix} 21 \\ 94 \\ 67 \end{pmatrix}$.

Le nombre de pièces de chaque type que l'entreprise peut fabriquer est donné par la matrice X.

$X = P \times Y = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 21 \\ 94 \\ 67 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 6 \end{pmatrix}$

Donc l'entreprise peut fabriquer 8 pièces de type A, 7 de type B et 6 de type C.

Partie C

Pour une informaticienne recrutée en janvier 2018, le salaire mensuel initial est de 1 500 euros. Pendant les dix premières années, son contrat prévoit une augmentation de 3 % du salaire mensuel au début de chaque nouvelle année.

On note u_n le salaire mensuel en euro, lors de la n-ième année de recrutement. Ainsi $u_1 = 1\,500$.

La direction des ressources humaines utilise un tableur afin d'évaluer les salaires mensuels versés chaque année à l'informaticienne (voir ci-contre).

	A	B
1	$\boldsymbol{n}$	$\boldsymbol{u(n)}$
2	1	1500
3	2	
4	3	
5	4	
6	5	
7	6	
8	7	
9	8	
10	9	
11	10	

1. Augmenter de 3 % c'est multiplier par 1,03 donc la suite (u_n) est géométrique de raison $q = 1{,}03$ et de premier terme $u_1 = 1\,500$.

2. La formule à saisir dans la cellule B3, permettant par recopie vers le bas de compléter les valeurs de la suite (u_n), est `= B2 * 1,03`

3. D'après le cours, $u_n = u_1 \times q^{n-1} = 1\,500 \times 1{,}03^{n-1}$.

4. $u_9 = 1\,500 \times 1{,}03^8 \approx 1\,900{,}16$

On peut donc dire que le salaire de l'informaticienne sera de 1 900,16 euros par mois l'année 2026.

Exercice 3 — 5 points

Une start-up conçoit un petit jeu gratuit pour smartphones. Dans ce jeu, un personnage est généré à chaque début de partie avec un équipement choisi dans une liste de 40 objets, vêtements et accessoires, qui sont numérotés de 0 à 39.

Le concepteur du jeu envisage différents algorithmes pour attribuer automatiquement ces objets à chaque début de partie. Le but de cet exercice est d'étudier certains d'entre eux.

1. $40 = 2 \times 20 = 2 \times 2 \times 10 = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 5 = 2^3 \times 5$ et $12 = 2 \times 6 = 2 \times 2 \times 3 = 2^2 \times 3$.

2. On calcule le PGCD de 12 et 40.

Décomposition de 40	2	2	2	5		
Décomposition de 12	2	2			3	
PGCD de 40 et de 12	2	2				4

Donc le PGCD de 40 et de 12 est 4.

3. Le concepteur du jeu envisage d'attribuer les objets à chaque début de partie en parcourant la liste de leurs numéros par des sauts d'amplitude constante a, où a est un nombre entier strictement positif :

— lors de la première partie, le personnage se voit attribuer l'objet numéro 0 ;

— pour obtenir le numéro de l'objet à partir de la deuxième partie, on ajoute a au numéro précédent et on calcule le reste de cette somme dans la division euclidienne par 40. Le reste obtenu est alors le numéro attribué à l'objet.

Par exemple, en choisissant la valeur $a = 12$, la liste des numéros des objets dans l'ordre est :

$$0\,;\,12\,;\,24\,;\,36\,;\,8\,;\ldots$$

a. On complète la liste des numéros des objets attribués lors des 11 premières parties, pour une amplitude de saut égale à 12 :

$$0\,;\,12\,;\,24\,;\,36\,;\,8\,;\,20\,;\,32\,;\,4\,;\,16\,;\,28\,;\,0$$

b. Lors de la 11$^{\text{e}}$ partie, on retrouve l'objet 0 déjà donné lors de la 1$^{\text{re}}$ partie donc ce choix d'amplitude, $a = 12$, ne permet pas d'utiliser tous les objets au cours des parties successives.

4. On admet le résultat suivant : « Le nombre a choisi permet de former une liste complète comportant tous les numéros de 0 à 39 dans le cas où le PGCD de 40 et de a est égal à 1, et dans ce cas seulement ».

Ainsi, les nombres a permettant d'utiliser tous les objets au cours des parties successives sont les entiers a qui sont premiers avec 40.

Tous les entiers a compris entre 1 et 39 pour lesquels, au cours des parties successives, tous les objets seront utilisés sont tous les nombres n'ayant dans leur décomposition en produit de facteurs premiers ni le facteur 2 ni le facteur 5 :

$$\{1\,;\,3\,;\,7\,;\,9\,;\,11\,;\,13\,;\,17\,;\,19\,;\,21\,;\,23\,;\,27\,;\,29\,;\,31\,;\,33\,;\,37\,;\,39\}$$