Corrigé du BTS SIO - Métropole - mai 2015

Épreuve facultative

Exercice 1 **10 points**

Partie A

1. **a.** Les défauts a et b pouvant se présenter de façon indépendante, les évènements A et B sont indépendants donc on a bien l'égalité $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

   b. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A) \times P(B) = 0,02 + 0,01 - 0,02 \times 0,01 = 0,0298$.
   Ainsi la probabilité qu'une batterie produite soit défectueuse est de 0,0298.

2. **a.** On a ici une expérience aléatoire répétée 100 fois de manière indépendante (assimilé à un tirage avec remise). Chaque expérience a deux issues, le succès « être défectueuse » ayant une probabilité de 0,0298 et l'échec « ne pas être défectueuse ». X compte de nombre de succès donc X sut la loi binomiale de paramètre 100 et 0,0298 : $X \hookrightarrow \mathcal{B}(100\,;\,0,0298)$

   b. $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leq 2) \approx 0,5757$ (en utilisant la calculatrice).
   La probabilité qu'il y ait au moins 3 pièces avec un défaut est de 0,5757 à 10^{-4} près

Partie B

1. $Y \hookrightarrow \mathcal{N}(80, 10))$, avec la calculatrice, on obtient $P(60 \leqslant Y \leqslant 100) \approx 0,9545$ à 10^{-4} près

2. ***Remarque : question hors programme !***
   $P(Y \geqslant h) = 0,95$ équivaut à $1 - P(Y < h) = 0,95$ et par continuité de Y on a $1 - P(Y \leqslant h) = 0,95$ soit $P(Y \leqslant h) = 0,05$.
   Avec la calculatrice on obtient $h \approx 63,55$.
   Cela signifie que la probabilité pour le temps de charge d'une batterie soit supérieur à 63,55 min est de 0,95.

Partie C

1. Comme $T \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, le temps moyen de bon fonctionnement est l'espérance de T soit : $E(T) = \dfrac{1}{\lambda}$.
   Ainsi $1\,900 = \dfrac{1}{\lambda}$, soit $\lambda = \dfrac{1}{1\,900} \approx 0,0005$ à 10^{-4} près et λ est exprimé en jour^{-1} (car $E(T)$ s'exprime en jours).

2. $P(T \geqslant 4\,000) = \mathrm{e}^{-\lambda \times 4000} = \mathrm{e}^{-0,0005 \times 4000} \approx 0,1353$ à 10^{-4} près.
   La probabilité que l'écran fonctionne encore correctement après 4 000 jours d 'utilisation est de 0,1353.

3. $P(T \leqslant t) = 0,7$ équivaut à $1 - \mathrm{e}^{-0,0005t} = 0,7 \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{e}^{-0,0005t} = 0,3 \quad \Leftrightarrow \quad -0,0005t = \ln(0,3) \quad \Leftrightarrow \quad t = \dfrac{-\ln(0,3)}{0,0005}$
   soit $t \approx 2\,408$ à l'unité près.
   Cela signifie que la probabilité qu'une défaillance ait lieu dans les 2 408 premiers jours est de 0,7.

Exercice 2 **10 points**

A. Étude d'une fonction

1. a. Pour tout réel x de l'intervalle [1 ; 6,5], f est dérivable et on a $f'(x) = -2\times 2x+20-0-16\dfrac{1}{x} = -4x+20-\dfrac{16}{x} = \dfrac{-4x^2+20x-16}{x}$ Or $\dfrac{-4(x-1)(x-4)}{x} = \dfrac{-4(x^2-4x-x+4)}{x} = \dfrac{-4x^2+20x-16}{x} = f'(x)$.

Ainsi on a bien $f'(x) = \dfrac{-4(x-1)(x-4)}{x}$

b. Étude du signe de $f'(x)$ sur l'intervalle [1 ; 6,5].

x	1		4		6,5
-4		$-$		$-$	
$x-1$	0	$+$		$+$	
$x-4$		$-$	0	$+$	
x		$+$		$+$	
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	

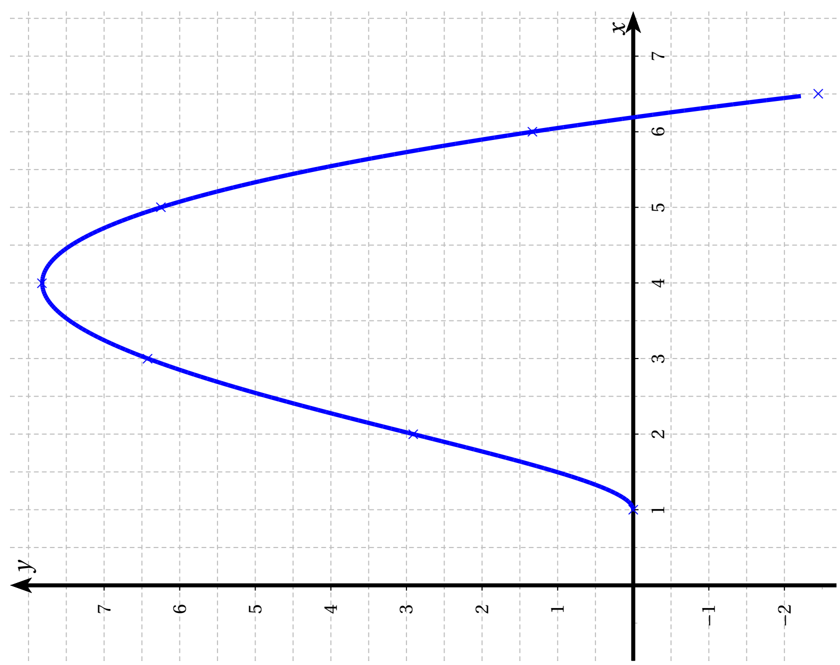
c. D'après la question précédente on obtient le tableau de variation de la fonction f suivant :

x	1	4	6,5
$f(x)$	0 ↗	7,8	↘ $-2,5$

2. a.

x	1	2	3	4	5	6	6,5
$f(x)$	0	2,9	6,4	7,8	6,2	1,3	$-2,5$

b. Courbe $\mathscr{C}_f$ dans le repère $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.



3. $F(x) = -\dfrac{2}{3}x^3+10x^2-2x-16x\ln(x)$ donc on a :

$F'(x) = -\dfrac{2}{3}\times 3x^2+10\times 2x-2-16\left(x\times\dfrac{1}{x}+1\times\ln(x)\right) = -2x^2+20x-2-16-16\ln(x) = -2x^2+20x-18-16\ln(x) = f(x)$

Ainsi la fonction F est une primitive de la fonction f sur l'intervalle [1 ; 6,5].

B. Applications à l'économie

1. a. f est continue sur $[4; 6,5]$ avec $f(4) > 0$ et $f(6,6) < 0$ donc l'équation $f(q) = 0$ admet une solution sur $[4; 6,5]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. De plus f est strictement décroissante sur cet intervalle donc la solution est unique.

On trouve $f(q) = 0$ sur l'intervalle [4 ; 6,5] pour $q \approx 6,19$

b. Ainsi l'entreprise réalise un bénéfice ($f(q) > 0$) si elle fabrique jusqu'à 619 pièces.

2. Afin d'obtenir le bénéfice maximal, l'entreprise doit fabrique 400 pièces (maximum de f pour $q = 4$ d'après la partie A).
Ce bénéfice maximal est alors de $f(4) = 7,8$ milliers d'euro (soit 7800 euros à la centaine d'euros près)

3.

$$B_m = \frac{1}{5,5} \times \int_1^{6,5} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{5,5} \times [F(x)]_1^{6,5} = \frac{1}{5,5} \times (F(6,5) - F(1)) \approx 4,4$$

Le bénéfice moyen est de 4,4 milliers d'euros, arrondi à la centaine d'euro.