∽ Corrigé du BTS Métropole 16 mai 2025 ∾
Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

Exercice 1 — 10 points

Partie A

En 2023, une entreprise jetait 20 tonnes d'emballages cartonnés. Elle souhaite réduire la quantité d'emballages cartonnés qu'elle jette de 3 % par an en réutilisant les cartons les moins abîmés.

Pour tout entier naturel n, on note u_n le nombre de tonnes d'emballages cartonnés jetés par l'entreprise durant l'année $2023+n$. Ainsi on a $u_0 = 20$.

1. **a.** $u_1 = u_0 - u_0 \times \dfrac{3}{100} = 20 - 20 \times \dfrac{3}{100} = 19,4$

En 2024, l'entreprise a jeté 19,4 tonnes de cartons.

b. Réduire de 3 %, c'est multiplier par $1 - \dfrac{3}{100} = 0,97$.

Donc pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} = 0,97u_n$.

c. On peut donc dire que la suite u_n) est géométrique de raison $q = 0,97$ et de premier terme $u_0 = 20$.

2. **a.** La suite u_n) est géométrique de raison $q = 0,97$ et de premier terme $u_0 = 20$ donc, ppour tout entier naturel n, on a : $u_n = u_0 \times q^n = 20 \times 0,97^n$.

b. L'année 2023 correspond au rang 0, donc l'année 2029 correspond au rang 6.

$u_6 = 20 \times 0,97^6 \approx 16,659$ donc le nombre de tonnes d'emballages cartonnés jetés en 2029 est 16,659 tonnes.

c. L'année à partir de laquelle l'entreprise jettera moins de 15 tonnes d'emballages cartonnés par an est le plus petit entier naturel n tel que $u_n < 15$.
On résout cette inéquation.

$$u_n < 15 \iff 20 \times 0,97^n < 15 \iff 0,97^n < \frac{15}{20} \iff \ln\left(0,97^n\right) < \ln\left(\frac{15}{20}\right)$$

$$\iff n \times \ln(0,97) < \ln\left(\frac{15}{20}\right) \iff n > \frac{\ln\left(\frac{15}{20}\right)}{\ln(0,97)}$$

Or $\dfrac{\ln\left(\frac{15}{20}\right)}{\ln(0,97)} \approx 9,4$ donc il faut prendre $n = 10$ qui correspond à l'année 2033.

C'est donc à partir de 2033 que l'entreprise jettera moins de 15 tonnes d'emballages cartonnés par an.

Partie B

Après avoir trié et stocké les emballages en carton qu'elle pouvait réutiliser, l'équipe chargée du tri a constaté que :

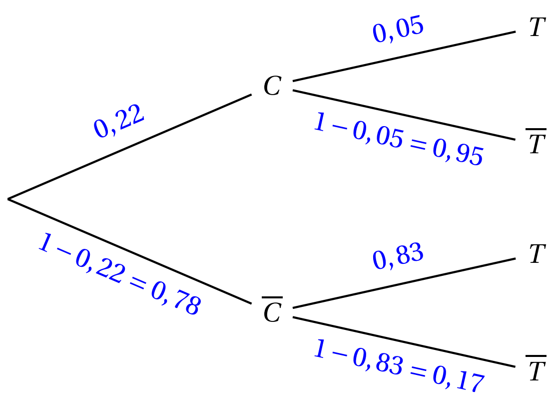
- 22 % des emballages en carton réutilisables nécessitent d'être consolidés ;
- parmi les emballages en carton qui ne nécessitent pas d'être consolidés, 83 % sont de petite taille ;
- parmi les emballages en carton qui doivent être consolidés, 5 % sont de petite taille.

On choisit au hasard un emballage en carton réutilisable dans le stock.

On considère les évènements suivants :

- C : « l'emballage doit être consolidé » ;
- T : « l'emballage est de petite taille ».

1. On représente la situation à l'aide d'un arbre pondéré.



2. **a.** $P(C\cap T) = P(C)\times P_C(T) = 0,22\times 0,05 = 0,011$

On en déduit que le pourcentage de cartons de petite taille à consolider est de 1,1 %.

b. D'après la formule des probabilités totales :

$P(T) = P(C\cap T) + P\left(\overline{C}\cap T\right) = 0,01 + 0,78\times 0,83 = 0,658\,4$

On en déduit que le pourcentage de cartons de petite taille est de 65,84 %.

3. Un emballage en carton de petite taille est prélevé au hasard dans le stock.

La probabilité qu'il nécessite d'être consolidé est : $P_T(C) = \dfrac{P(C\cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,011}{0,6584} \approx 0,017$.

Partie C

Les emballages en carton réutilisables sont rangés dans des caisses hermétiques pouvant contenir 20 cartons pliés. Pour constituer ces caisses, l'entreprise prélève au hasard 20 cartons réutilisables dans son stock. Ce stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, à tout lot de 20 cartons, associe le nombre de ceux qui ont été consolidés.

1. Pour un carton, il y a deux possibilités : il doit être consolidé, avec une probabilité $p = 0,22$, ou il n'a pas besoin d'être consolidé.

   L'entreprise prélève au hasard 20 cartons réutilisables dans son stock et ce stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

   Donc la variable aléatoire X qui, à tout lot de 20 cartons, associe le nombre de ceux qui ont été consolidés suit la loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = 0,22$.

2. **a.** La probabilité qu'il n'y ait aucun carton qui ait été consolidé est :

   $P(X=0) = \binom{20}{0} \times 0,22^0 \times (1-0,22)^{(20-0} = 0,78^{20} \approx 0,007.$

   b. À la calculatrice, on trouve que la probabilité qu'il y ait au plus 4 cartons consolidés dans le lot choisi au hasard est : $P(X \leqslant 4) \approx 0,542$.

Exercice 2 — 10 points

Partie A

Une entreprise de jardinage s'est lancée dans l'e-commerce depuis 2017. On a répertorié son chiffre d'affaires en milliers d'euros (k€) réalisé chaque année jusqu'en 2023.

Année	2017	2018	2019	2020	2021	2022	2023
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre d'affaires en k€ : y_i	81,7	120,3	150,2	200,3	286,1	402,1	512,3

On souhaite estimer le chiffre d'affaires de cette entreprise en 2026.

1. On complète le tableau suivant en arrondissant les valeurs à 0,01.

Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6	7
$z_i = \ln y_i$	4,40	4,79	5,01	5,30	5,66	6,00	6.24

2. À l'aide de la calculatrice, on donne une équation de la droite d'ajustement de z en x, en arrondissant les coefficients au centième : $z = 0,31x + 4,12$.
3. $z = 0,31x + 4,12$ donc $\ln(y) = 0,31x + 4,12$ donc $y = \mathrm{e}^{0,31x+4,12}$ donc $y = \mathrm{e}^{0,31x} \times \mathrm{e}^{4,12}$

   $\mathrm{e}^{4,12} \approx 61,56$ donc l'expression $y = 61,56\,\mathrm{e}^{0,31x}$ modélise le chiffre d'affaires pour l'année de rang x.
4. L'année 2026 correspond au rang 10 donc le chiffre d'affaires peut être estimé en 2026 à $61,56\,\mathrm{e}^{0,31\times10}$ soir environ 1 366,51 k€.

Partie B

Suite à une modernisation de son site de vente en ligne, l'entreprise étudie pendant 24 heures le nombre de visites sur ce site, le jour d'ouverture des soldes. Le nombre de visites en milliers est modélisé par la fonction f définie sur l'intervalle $[0 ; 24]$ par $f(x) = 55x\,\mathrm{e}^{-0,4x}$, où x représente le nombre d'heures écoulées depuis 7 h du matin.

1. Pour tout x appartenant à $[0\,;\,24]$, on a : $f(x) = 55x\mathrm{e}^{-0,4x}$ donc

$f'(x) = 55 \times 1 \times \mathrm{e}^{-0,4x} + 55x \times (-0,4)\,\mathrm{e}^{-0,4x} = \mathrm{e}^{-0,4x}(55-22x) = \mathrm{e}^{-0,4x}(-22x+55)$

2. $-22x+55>0 \iff 55>22x \iff \dfrac{55}{22}>x \iff x<2,5$

De plus, pour tout x, $\mathrm{e}^{-0,4x}>0$. On établit le tableau de signes de $f'(x)$.

x	0		$2,5$		24
$-22x+55$		$+$	0	$-$	
$\mathrm{e}^{-0,4x}$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	

3. $f(0)=0$, $f(2,5)\approx 50,58$ et $f(24)\approx 0,09$

On dresse le tableau de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,24]$.

x	0		$2,5$		24
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\approx 50,58$	$\searrow$	$\approx 0,09$

4. La fonction f admet pour maximum $50,58$, qui est atteint pour $x=2,5$.

a. Le nombre de visites maximal durant ces 24 heures est donc de $50,58$ milliers, soit $50\,580$.

b. Ce nombre de visites maximal est atteint pour $x=2,5$ donc au bout de 2 heures et demies.

5. a. Sur $[0\,;\,2,5]$, la fonction f est continue et strictement croissante, et passe de 0 à $50,58$. Or $0<20<50,58$, donc d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=20$ admet une solution unique sur cet intervalle. On l'appelle α.

b. À l'aide de la calculatrice, on trouve : $f(0,4)\approx 18,75<20$ et $f(0,5)\approx 22,52>20$.

Donc $0,5$ est une valeur approchée par excès à $0,1$ près de α.

c. On admet que l'équation $f(x)=20$ admet également une unique solution sur $[2,5\,;\,24]$ et qu'une valeur approchée à 0,1 près de cette solution est 7,5.

On complète le tableau de variation de f.

x	0		$0,5$		$2,5$		$7,5$		24
$f(x)$	0	$\nearrow$	20	$\nearrow$	$50,58$	$\searrow$	20	$\searrow$	$0,09$

Entre $0,5$ et $7,5$, on a $f(x) > 20$, soit pendant 7 heures.

Donc pendant 7 heures, il y a eu plus de 20 000 visites sur le site.