Corrigé du BTS Métropole mai 2022
Services informatiques aux organisations

Mathématiques approfondies

Exercice 1 **10 points**

Une start-up fabrique entre 100 et 2 000 ordinateurs par jour. On admet que si la start-up fabrique x **centaines** d'ordinateurs, le bénéfice en **centaines** d'euros est modélisé par :

$$f(x) = 80x\,\mathrm{e}^{-0,2x}, \quad \text{avec } x \in [1\ ;\ 20].$$

On note f' la dérivée de la fonction f, et on note $\mathscr{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

Partie A - Étude graphique

À l'aide du graphique en annexe, on peut dire que :

1. le maximum de la fonction f sur l'intervalle $[1; 20]$ est d'environ 147 ;
2. les solutions de l'équation $f(x) = 100$ sont environ égales à $1,8$ et à $10,8$.

Partie B - Étude de la fonction *f*

1. **a.** Pour tout x appartenant $[1; 20]$, on a :
$f'(x) = 80 \times 1 \times \mathrm{e}^{-0,2x} + 80 \times x \times (-0,2) \times \mathrm{e}^{-0,2x} = 80\,\mathrm{e}^{-0,2x}(1 - 0,2x)$.

   b. On étudie le signe de $f'(x)$ sur l'intervalle $[1; 20]$.

   - Pour tout réel t, $\mathrm{e}^{t} > 0$, donc pour tout x, $80\,\mathrm{e}^{-0,2x} > 0$.
   - $1 - 0,2x > 0 \iff 1 > 0,2x \iff x < 5$
   - $1 - 0,2x = 0 \iff 1 = 0,2x \iff x = 5$

   Donc $f'(x) > 0$ sur $[0; 5[$, et $f'(x) < 0$ sur $]5; 20]$.

   c. On établit le tableau de variation de la fonction f.
$f(1) = 80\,\mathrm{e}^{-0,2} \approx 65,50$; $f(5) = 80 \times 5 \times \mathrm{e}^{-0,2\times 5} = 400\,\mathrm{e}^{-1} \approx 147,15$ et
$f(20) = 80 \times 20 \times \mathrm{e}^{-0,2\times 20} = 1\,600\,\mathrm{e}^{-4} \approx 29,31$

x	1		5		20
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	65,50	↗	147,15	↘	29,31

2. On complète le tableau de variation de f entre 1 et 5.

x	1	α	5	20
$f(x)$	$65,50$	100	$147,15$	$29,31$

On en déduit que l'équation $f(x) = 100$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1\,;\,5]$; on l'appelle α.

- $f(1) \approx 65,50 < 100$ et $f(2) \approx 107,25 > 100$ donc $1 < \alpha < 2$
- $f(1,7) \approx 96,80 < 100$ et $f(1,8) \approx 100,47 > 100$ donc $1,7 < \alpha < 1,8$
- $f(1,78) \approx 99,75 < 100$ et $f(1,79) \approx 100,11 > 100$ donc $1,78 < \alpha < 1,79$

On prendra $\alpha \approx 1,78$.

On admet que sur l'intervalle $[5\,;\,20]$ l'équation $f(x) = 100$ admet également une unique solution égale à environ $10,76$.

Partie C - Interprétation

1. Le bénéfice maximal est réalisé quand la fonction atteint son maximum, soit en $x = 5$. Le maximum de la fonction est alors égal à $f(5) = 400\,\mathrm{e}^{-1} \approx 147,15$.

   Le bénéfice maximum, en euro et arrondi à l'euro, est donc de 14 715, et il est obtenu pour la fabrication de 500 ordinateurs.

2. Un bénéfice supérieur ou égal à 10 000 euros, correspond à $f(x) \geqslant 100$, ce qui se produit, d'après les questions précédentes, quand x est compris entre $1,78$ et $10,76$.

   Il faut donc fabriquer entre 178 et 1 076 ordinateurs pour que le bénéfice soit supérieur ou égal à 10 000 euros.

Exercice 2 **10 points**

Le directeur d'une entreprise fabriquant des cartes mères souhaite optimiser la production mensuelle. Il possède deux sites distincts notés A et B.

Le site A produit 65 % des cartes mères, le reste provient du site B.

Il a constaté que 0,8 % des cartes produites par A sont défectueuses alors que, sur le site B, la part des cartes défectueuses est de 0,5 %.

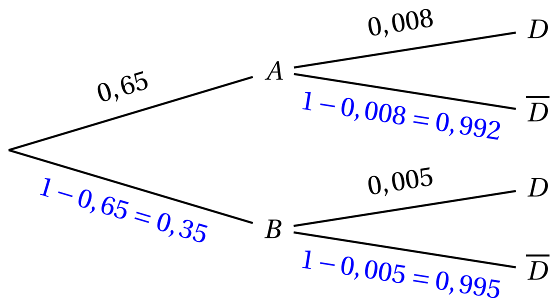
Partie A

On prélève au hasard une carte mère à la sortie de la chaîne de production. On considère les évènements suivants :

- A : « la carte a été produite par l'usine A. »
- B : « La carte a été produite par l'usine B. »
- D : « La carte est défectueuse. »

On rappelle que, quel que soit l'évènement E, on note $\overline{E}$ son évènement contraire.

1. On représente la situation par un arbre pondéré.



2. **a.** La probabilité de l'évènement $A \cap D$ est :

$P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,65 \times 0,008 = 0,0052$.

La probabilité que la carte ait été produite par l'usine A et soit défectueuse est égale à 0,005 2, ce qui veut dire qu'on peut estimer qu'il y en a 0,52 %.

b. D'après la formule des probabilités totales :

$P(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,0052 + 0,35 \times 0,005 = 0,00695$.

Donc on peut estimer à 0,695 % le pourcentage de cartes défectueuses dans la production totale.

3. Une carte défectueuse a été prélevée au hasard dans le lot.

La probabilité qu'elle ait été produite par l'usine A est :

$P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{0,0052}{0,00695} \approx 0,748$

Partie B

On considère dans cette partie que la probabilité qu'une carte soit défectueuse est égale à 0,007. Les cartes produites par la start-up sont vendues par lots de 30. Avant expédition, on prélève au hasard un lot de 30 cartes pour vérifier leur bon fonctionnement. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X la variable aléatoire qui, pour un lot de 30 cartes prélevées, dénombre celles qui sont défectueuses.

1. Le stock est suffisamment important pour assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise, donc il s'agit de répétition de 30 tirages se déroulant dans les mêmes conditions

La variable aléatoire X qui dénombre les cartes défectueuses suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 30$ et $p = 0,007$.

2. **a.** La probabilité qu'aucune carte prélevée ne soit défectueuse est :

$P(X = 0) = (1 - 0,007)^{30} \approx 0,81$.

b. La probabilité qu'au moins une carte prélevée présente un défaut dans le lot choisi au hasard est donc : $P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 1 - 0,81 \approx 0,19$.

Partie C

Dans cette partie, l'équipe de production du site A souhaite étudier le débit du bus FSB des cartes mères qu'elle produit.
On note Y la variable aléatoire qui modélise ce débit en Mo/s (méga octet par seconde).
On admet que Y suit une loi normale de moyenne $\mu = 1\,350$ et d'écart-type $\sigma = 33$.
On prélève au hasard une carte mère à la sortie de la chaîne de production.

1. La probabilité que le débit de la carte choisie soit compris entre 1 317 et 1 383 Mo/s est : $P(1\,317 \leqslant Y \leqslant 1\,383) \approx 0,683$.
2. Pour déterminer la plus grande valeur de l'entier k tel que $P(Y > k) \geqslant 0,95$, on fait par approximations successives à la calculatrice.

   On trouve : $P(Y > 1\,296) \approx 0,949 < 0,95$ et $P(Y > 1\,295) \approx 0,952 \geqslant 0,95$

   Donc la plus grande valeur de l'entier k tel que $P(Y > k) \geqslant 0,95$ est $k = 1\,295$.

ANNEXE

Exercice 1