Corrigé du BTS SERVICES INFORMATIQUES AUX ORGANISATIONS Nouvelle-Calédonie décembre 2019 Mathématiques approfondies

Exercice 1 **10 points**

Partie A : étude des défauts des verres

1. Indépendance des évènements A et B :

On sait que A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$.

Or, d'après les données du problème, $P(A \cap B) = P(C)$ et $P(A) = 0{,}1$ et $P(B) = 0{,}0$.

On a $P(A) \times P(B) = 0{,}008 \neq P(C) = 0{,}006$. Donc les évènements A et B ne sont pas indépendants.

2. **a.** Calcul de $P(D)$:
On a $P(D) = P(A \cup B)$. Donc :
$P(D) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0{,}1 + 0{,}08 - 0{,}006 = \boxed{0{,}174}$

b. Calcul de $P(E)$:
$E = \left(A \cap \overline{B}\right) \cup \left(\overline{A} \cap B\right)$
D'après la formule des probabilités totales :
$P(A) = P(A \cap B) + P\left(A \cap \overline{B}\right) \iff P\left(A \cap \overline{B}\right) = P(A) - P(A \cap B) = 0{,}1 - 0{,}006 = 0{,}094$
De même $P\left(\overline{A} \cap B\right) = 0{,}074$
On a donc : $P(E) = 0{,}094 + 0{,}074 = \boxed{0{,}168}$

c. , Probabilité que le verre ait un défaut de type a sachant qu'il présente au moins un défaut :
$P_D(A) = \dfrac{P(A \cap D)}{P(D)} = \dfrac{P(A)}{P(D)} = \dfrac{0{,}1}{0{,}174} = \boxed{\dfrac{50}{87} \approx 0{,}575}$

3. Loi de probabilité de la variable aléatoire X :

L'expérience consiste à répéter n fois de manière indépendante une même épreuve ayant deux issues possibles, le succès (le verre ne présente aucun défaut) avec la probabilité $p = 0{,}826$ ou l'échec (le verre présente au moins un défaut) avec la probabilité $q = 1 - p = 0{,}174$. On a donc un schéma de Bernoulli.

La variable aléatoire X compte le nombre de succès dans ce schéma de Bernoulli, donc elle suit une loi binomiale.

4. **a.** Paramètres de cette loi binomiale :
X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}826$.
$\boxed{X \hookrightarrow \mathscr{B}(10\,;\,0{,}826)}$

b. Probabilité de l'évènement F :
$P(F) = P(X \geqslant 9) = P(X = 9) + P(X = 10) = \binom{10}{9} \times 0{,}826^9 \times 0{,}174^1 + \binom{10}{10} \times 0{,}826^{10} \times 0{,}174^0 \approx \boxed{0{,}459}$

c. Probabilité qu'aucun verre du lot ne présente de défaut :
$P(X = 10) = \binom{10}{10} \times 0{,}826^{10} \times 0{,}174^0 \approx \boxed{0{,}148}$

5. **a.** Espérance de la variable aléatoire X :
$E(X) = n \times p = 100 \times 0{,}826 = \boxed{82{,}6}$
Écart type de la variable aléatoire X :
$\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1 - p)} = \sqrt{100 \times 0{,}826 \times 0{,}174} \approx \boxed{3{,}791}$

b. i. Probabilité que dans le lot de $n = 100$ verres prélevés, il y ait entre 9 et 12 verres défectueux :
À l'aide de la calculatrice on a :
$P(87{,}5 \leqslant Y \leqslant 91{,}5) = \boxed{0{,}089}$
La probabilité qu'il y ait entre 9 et 12 verres défectueux dans le lot est 0,089.

ii. Probabilité que dans ce lot de 100 verres, il y ait au moins 11 verres défectueux :
À l'aide de la calculatrice, on a :
$P(Y \leqslant 89{,}5) = \boxed{0{,}965}$.
La probabilité qu'il y ait au moins 11 verres défectueux dans le lot est 0,965.

Partie B : étude du coefficient de transmission des verres

1. Équation de la droite d'ajustement de y en x :

$\boxed{y = 2{,}73x - 1\,090{,}7}$

2. Coefficient de transmission pour une longueur d'onde de 416 nm :

$y = 2{,}73 \times 416 - 1\,090{,}7 \approx \boxed{45}$

Le coefficient de transmission pour une longueur d'onde de 416ñm est 45.

Exercice 2 **10 points**

Partie A

1.

x	0	2	4	6	8	10	12	14	15	16
$f(x)$	44,74	54,6	63.22	70.06	75.09	78.58	80.91	82,42	82,96	83,39

2. **a.** Limite de la fonction f lorsque x tend vers $+\infty$:

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{85}{1+0{,}9\mathrm{e}^{-0{,}24x}}$

$\lim\limits_{x\to+\infty} -0{,}24x = -\infty \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}24x} = 0 \implies \lim\limits_{x\to+\infty} 1+0{,}9\mathrm{e}^{-0{,}24x} = 1 \implies \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{85}{1+0{,}9\mathrm{e}^{-0{,}24x}} = \boxed{85}$

b. Interprétation graphique :

Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 85$, la droite d'équation $y = 85$ est asymptote horizontale à la courbe représentative de f en $+\infty$.

3. **a.** Détermination de $U'(x)$:

$U(x) = 1 + 0{,}9\mathrm{e}^{-0{,}24x}$

$U'(x) = 0 + 0{,}9 \times \left(-0{,}24 \times \mathrm{e}^{-0{,}24x}\right) = \boxed{-0{,}216\mathrm{e}^{-0{,}24x}}$

b. Détermination de $f'(x)$:

$f'(x) = -\dfrac{85 \times \left(-0{,}216\mathrm{e}^{-0{,}24x}\right)}{\left(1+0{,}9\mathrm{e}^{-0{,}24x}\right)^2} = \boxed{\dfrac{18{,}36\mathrm{e}^{-0{,}24x}}{\left(1+0{,}9\mathrm{e}^{-0{,}24x}\right)^2}}$

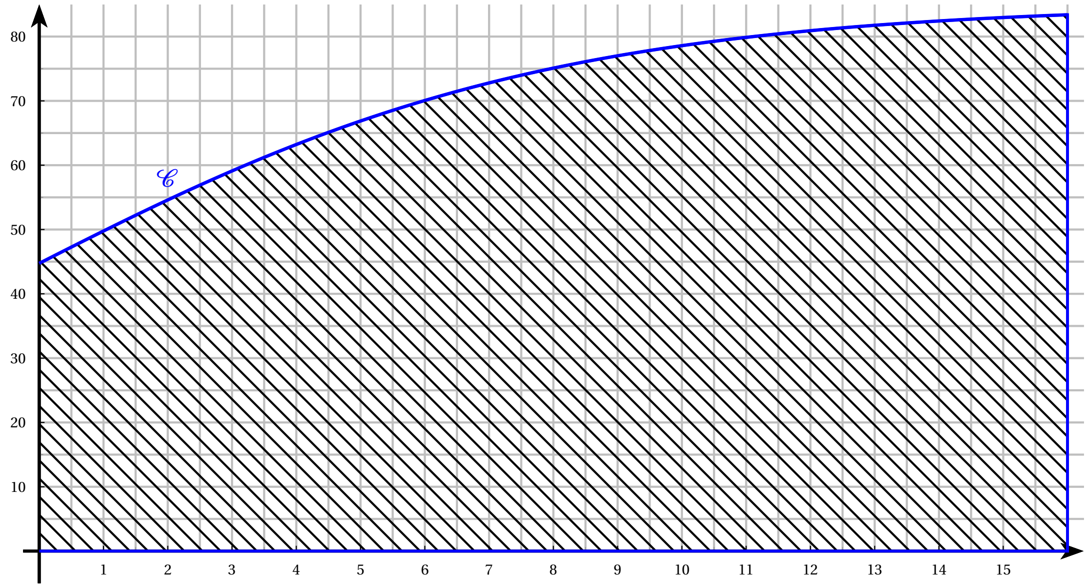
4. **a.** Sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~+\infty[$:

On étudie le signe de $f'(x)$:

On sait que pour tout réel x, $\mathrm{e}^x > 0$, donc $18{,}36\mathrm{e}^{-0{,}24x} > 0$ sur $[0~;~+\infty[$. De plus, $\left(1+0{,}9\mathrm{e}^{-0{,}24x}\right)^2 > 0$ sur $[0~;~+\infty[$. Donc $f'(x)$ est strictement positive sur $[0~;~+\infty[$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0~;~+\infty[$

b. Représentation graphique $\mathscr{C}$ de la fonction f sur l'intervalle $[0~;~16]$:



5. **a.** Valeur approchée de l'intégrale $\int_0^{16} f(x)\,dx$:

$$\begin{aligned}
\int_0^{16} f(x)\,dx &= \int_0^{16} \frac{85}{1+0{,}9\mathrm{e}{-}0{,}24x}\,dx = F(16)-F(0)\\
&= 354\ln\left(0{,}9+e^{0{,}24\times 16}\right) - 354\ln(0{,}9+\mathrm{e}0{,}24\times 0)\\
&= 354\left[\ln(0{,}9+\mathrm{e}3{,}84)-\ln(0{,}9+1)\right]\\
&= 354\ln\left(\frac{0{,}9+\mathrm{e}3{,}84}{1{,}9}\right)\\
&\approx \boxed{1\,139}
\end{aligned}$$

b. Valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[0\,;\,16]$:

$$\mu = \frac{1}{16-0}\int_0^{16} f(x)\,dx = \frac{1}{16}\times 354\ln\left(\frac{0{,}9+\mathrm{e}3{,}84}{1{,}9}\right) \approx \boxed{71}$$

Partie B

1. Taux d'équipement en micro-ordinateur exprimé en pourcentage prévu au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020 :

Pour déterminer le taux d'équipement en micro-ordinateur au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020 on doit calculer $f(16)$ puisque $2\,020-2\,004=16$.

D'après la partie A, on a $f(16)\approx 83{,}39$. Donc le taux d'équipement en micro-ordinateur au 1$^{\text{er}}$ janvier est 83 %.

2. Estimation, à long terme, du taux d'équipement en micro-ordinateur des ménages français :

Pour déterminer le taux d'équipement en micro-ordinateur à long terme on doit calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

D'après la partie A, on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=85$. Donc le taux d'équipement en micro-ordinateur à long terme est 85 %.

3. Estimation du taux moyen d'équipement en micro-ordinateur des ménages français pour la période allant du 1$^{\text{er}}$ janvier 2004 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020 :

Pour déterminer le taux moyen d'équipement en micro-ordinateur pour la période allant du 1$^{\text{er}}$ janvier 2004 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020 on doit calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[0\,;\,16]$.

D'après la partie A, on a $\mu\approx 71$. Donc le taux moyen d'équipement en micro-ordinateur pour la période allant du 1$^{\text{er}}$ janvier 2004 au 1$^{\text{er}}$ janvier 2020 est 71 %.