Corrigé du BTS Polynésie - mai 2025
Services informatiques aux organisations

Épreuve de mathématiques approfondies

Exercice 1 **10 points**

Partie A

L'évolution de la finesse de gravure d'un processeur est un élément clé dans l'amélioration des performances et de l'efficacité énergétique des puces électroniques. La finesse de gravure fait référence à la taille des composants individuels sur une puce, mesurée en nanomètres (nm). Plus elle est petite, plus les performances sont accrues. Au fil des années, la finesse de gravure des processeurs a considérablement diminué.

Dans le tableau ci-dessous, on donne la taille en nanomètres (nm) d'un processeur selon les années, entre 2004 et 2022.

Année : x_i	2004	2007	2010	2013	2016	2019	2022
Taille (en nm) : y_i	90	65	32	22	14	10	7

Le nuage de points $(x_i\,;y_i)$ suggère de procéder à un ajustement exponentiel.
Ainsi, on pose $z_i = \ln y_i$.

1. On complète le tableau suivant en arrondissant les valeurs à 10^{-3}.

Année : x_i	2004	2007	2010	2013	2016	2019	2022
$z_i = \ln y_i$	4,500	4,174	3,466	3,091	2,639	2,303	1,946

2. À l'aide d'une calculatrice, on détermine le coefficient de corrélation linéaire r de la série statistique $(x_i\,;z_i)$, arrondi à 10^{-3} : $r \approx -0{,}994$.

   $|r| = 0{,}994$ est très proche de 1, donc l'ajustement affine de cette série statistique est pertinent.
3. On détermine, à l'aide d'une calculatrice, une équation de la droite de régression de z en x, en arrondissant les coefficients à 10^{-4} : $z = -0{,}1456x + 296{,}267$.
4. $z = -0{,}1456x + 296{,}267$; or $z = \ln(y)$ donc $\ln(y) = -0{,}1456x + 296{,}267$ et donc $y = \mathrm{e}^{-0{,}1456x+296{,}267}$.
5. La taille estimée du processeur deviendra inférieure à 3 nm pour le plus petit entier x tel que $y < 3$. On résout cette inéquation.

   $$y<3 \iff \mathrm{e}^{-0{,}1456x+296{,}267}<3 \iff -0{,}1456x+296{,}267<\ln(3)$$
   $$\iff 296{,}267-\ln(3)<0{,}1456x \iff \frac{296{,}267-\ln(3)}{0{,}1456}<x$$

   $\dfrac{296{,}267-\ln(3)}{0{,}1456} \approx 2\,027{,}26$ donc c'est à partir de 2028 que la taille estimée du processeur deviendra inférieure à 3 nm.

Partie B

On s'intéresse ici à la production de processeurs par une entreprise. Pour fabriquer un processeur, cette entreprise choisit au hasard 10 composants dans son stock. On considère que le stock est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise. On suppose que la probabilité qu'un composant du processeur soit défectueux est égale à 0,1. On note X la variable aléatoire qui, à chaque processeur, associe le nombre de composants défectueux.

1. Pour un composant, il n'y a que deux issues : il est défectueux (avec une probabilité $p = 0{,}1$), ou il ne l'est pas.

   On choisit au hasard $n = 10$ composants dans son stock et on considère que le stock est suffisamment important pour que ce prélèvement soit assimilé à un tirage avec remise.

   Donc la variable aléatoire qui, à chaque processeur, associe le nombre de composants défectueux suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0{,}1$.
2. La probabilité qu'aucun des composants du processeur ne soit défectueux est :

   $P(X = 0) = \binom{10}{0} \times 0{,}1^0 \times (1 - 0{,}1)^{10} = 0{,}9^{10} \approx 0{,}349$.
3. La probabilité qu'au moins 3 composants soient défectueux. est :

   $P(X \geqslant 3) = 1 - P(X < 3) = 1 - P(X \leqslant 2) \approx 1 - 0{,}929\,81 \approx 0{,}070$.

Partie C

La durée de vie, en années, d'un processeur peut être modélisée par une variable aléatoire D qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}2$.

1. Une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$ a pour espérance $\dfrac{1}{\lambda}$.

   $\lambda = 0{,}2$ donc $\dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0{,}2} = 5$ donc la durée de vie moyenne d'un processeur est de 5 ans.
2. Si D est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, on sait que pour tout $a \geqslant 0$, on a $P(D \leqslant a) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda a}$.

   Donc la probabilité que la durée de vie d'un processeur soit inférieure à 7 années est :

   $P(D \leqslant 7) = 1 - \mathrm{e}^{-0{,}2\times 7} \approx 0{,}753$.

Exercice 2 — 10 points

Partie A

Une entreprise décide d'utiliser un « nuage » lui permettant de stocker ses données sur un serveur distant, accessible via internet. Au mois de janvier 2023, la capacité de stockage de ce « nuage » était de 150 gigaoctets (Go). L'entreprise décide alors d'augmenter cette capacité de 5 % chaque mois.

Pour tout entier naturel n, on note s_n la capacité de stockage du « nuage » utilisé par l'entreprise, en gigaoctets (Go), le n-ième mois après janvier 2023. Ainsi, on a $s_0 = 150$.

1. $s_1 = s_0 + s_0 \times \dfrac{5}{100} = 150 + 150 \times \dfrac{5}{100} = 157{,}5$

   On peut estimer qu'en février 2023 la capacité de stockage est de 157,5 Go.

2. **a.** Augmenter de 5 %, c'est multiplier par $1 + \dfrac{5}{100} = 1 + 0{,}05 = 1{,}05$

   Donc pour tout entier naturel n, on a : $s_{n+1} = 1{,}05 \times s_n$.

   b. On en déduit que la suite (s_n) est géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de premier terme $s_0 = 150$.

3. La suite (s_n) est géométrique de raison $q = 1{,}05$ et de premier terme $s_0 = 150$ donc pour tout entier naturel n, on a : $s_n = s_0 \times q^n = 150 \times 1{,}05^n$.

4. Le mois de mars 2024 correspond à $n = 14$; $s_{14} = 150 \times 1{,}05^{14} \approx 297$

   Donc la capacité de stockage de cette entreprise au mois de mars 2024 peut être estimée à 297 Go.

5. La capacité de stockage de l'entreprise dépassera 1 000 Go pour l'entier naturel n vérifiant $s_n > 1\,000$. On résout cette inéquation.

   $$s_n > 1\,000 \iff 150 \times 1{,}05^n > 1\,000 \iff 1{,}05^n > \frac{1\,000}{150} \iff \ln\left(1{,}05^n\right) > \ln\left(\frac{1\,000}{150}\right)$$
   $$\iff n \times \ln(1{,}05) > \ln\left(\frac{1\,000}{150}\right) \iff n > \frac{\ln\left(\frac{1\,000}{150}\right)}{\ln(1{,}05)}$$

   $\dfrac{\ln\left(\frac{1\,000}{150}\right)}{\ln(1{,}05)} \approx 38{,}9$ donc $n = 39$.

   Le 39e mois après janvier 2023 est avril 2026. C'est donc en avril 2026 que la capacité de stockage de l'entreprise dépassera 1 000 Go.

Partie B

L'utilisation de ce « nuage » par l'entreprise génère un coût mensuel variant selon sa capacité de stockage.

Pour une capacité de stockage de x téraoctet (To), le coût mensuel, exprimé en euros, est modélisé par la fonction C définie sur l'intervalle $[10\,;500]$ par : $C(x) = -15\ln(2x+1) + 10x$.

1. $C(10) = -15\ln(2 \times 10 + 1) + 10 \times 10 \approx 54{,}3$

   Le coût mensuel pour une capacité de stockage de 10 To est de 54,3 €.

2. Pour tout x appartenant à l'intervalle $[10\,;500]$: $C(x) = -15\ln(2x+1) + 10x$.

   donc $C'(x) = -15 \times \dfrac{2}{2x+1} + 10 = \dfrac{-30 + 10(2x+1)}{2x+1} = \dfrac{-30 + 20x + 10}{2x+1} = \dfrac{20x - 20}{2x+1}$.

3. On étudie le signe de $C'(x)$ sur l'intervalle $[10\,;500]$.

   - $x \geqslant 10$ donc $20x - 20 \geqslant 180$ donc $20x - 20 > 0$.
   - $x \geqslant 10$ donc $2x + 1 \geqslant 21$ donc $2x + 1 > 0$.

   Donc pour tout x de $[10\,;500]$, $C'(x) > 0$, donc la fonction C est croissante.

   $C(500) = -15\ln(2 \times 500 + 1) + 10 \times 500 \approx 4\,896{,}4$.

   On établit le tableau de variation de la fonction C.

x	10		500
$C'(x)$		$+$	
C	54,3	$\nearrow$	4 896,4

4. **a.** On complète le tableau de variation de C

x	10	α	500
C	54,3 $\nearrow$	2 000	$\nearrow$ 4 896,4

On en déduit que l'équation $C(x) = 2\,000$ admet une unique solution sur l'intervalle $[10\,;500]$; on l'appelle α.

b. On admet qu'une valeur approchée de α à 1 près par défaut est 209.
L'entreprise ne souhaite pas dépenser plus de 2 000 euros par mois pour l'utilisation du « nuage ».

La fonction C est croissante sur $[10\,;500]$, donc si $x \leqslant \alpha$, alors $C(x) \leqslant C(\alpha)$.
Cela veut dire que si $x \leqslant 209$, alors $C(x) \leqslant 2\,000$.

La capacité de stockage maximale que l'entreprise pourra utiliser est de 209 To.