# Corrigé du brevet de technicien supérieur Opticien–lunetier
# 13 mai 2019

**Exercice 1** (10 points)

**Partie A.**

1. **a.** D'après le formulaire, on sait que les solutions de $(E)$ sont les fonctions définies sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(t)=k\mathrm{e}^{-\frac{0,2}{1}t}=k\mathrm{e}^{-0,2t};\ k\in\mathbb{R}.$$

   **b.** La donnée $f(0)=20 \iff k\mathrm{e}^0=20 \iff k=20$.
   Conclusion : la fonction solution de $(E)$ qui vérifie la condition initiale est la fonction $f$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(t)=20\mathrm{e}^{-0,2t}$.

2. **a.** $\mathrm{e}^{-0,2t}=0,5$ done par croissance de la fonction logarithme $-0,2t=\ln 0,5$, soit $t=\dfrac{\ln 0,5}{-0,2}$

   **b.** La durée demi-vie vérifie l'équation :
   $20\mathrm{e}^{-0,2t}=\dfrac{20}{2}=10$ ou encore $\mathrm{e}^{-0,2t}=0,5$. La demi-vie est donc la solution précédente; or $\dfrac{\ln 0,5}{-0,2}\approx 3,465\,73$ h, soit 3 h et $0,465\,73\times 60\approx 27,94$ min.
   La demi-vie est donc environ 3 h 28 min (à la minute près).

3. **a.** Une primitive de $f$ est la fonction $F$ définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par
   $F(t)=\dfrac{20}{-0,2}\mathrm{e}^{-0,2t}=-100\mathrm{e}^{-0,2t}$.

   **b.** On sait que quel que soit le réel $t$, $\mathrm{e}^{-0,2t}>0$ et par conséquent $20\mathrm{e}^{-0,2t}>0$.
   Donc l'aire, en unité d'aire, limitée par la courbe représentative de la fonction $f$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $t=0$ et $t=15$ est égale à
   $\mathscr{A}=\displaystyle\int_0^{15} f(t)\,\mathrm{d}t=[F(t)]_0^{15}=F(15)-F(0)=-100\mathrm{e}^{-0,2\times15}-\left(-100\mathrm{e}^{-0,2\times0}\right)=-100\mathrm{e}^{-3}+100=100\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)$ (u. a.).

**Partie B.**

1. **a.** De $g(t)=20\left(\mathrm{e}^{-0,2t}-\mathrm{e}^{-2t}\right)$, on en déduit par dérivation :
   $g'(t)=20\left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}-(-2)\mathrm{e}^{-2t}\right)=20\left(-0,2\mathrm{e}^{-0,2t}+2\mathrm{e}^{-2t}\right)=-4\mathrm{e}^{-0,2t}+40\mathrm{e}^{-2t}$ et en développant :
   $g'(t)=-4\mathrm{e}^{-0,2t}+40\mathrm{e}^{-2t}$.
   D'autre part :
   $40\mathrm{e}^{-2t}\left(1-0,1\mathrm{e}^{1,8t}\right)=40\mathrm{e}^{-2t}-40\mathrm{e}^{-2t}\times\mathrm{e}^{1,8t}=40\mathrm{e}^{-2t}-440\mathrm{e}^{-2t+1,8t}=40\mathrm{e}^{-2t}-4\mathrm{e}^{-0,2t}$
   Conclusion : pour tout $t\in[0\,;\,+\infty[$, $g'(t)=40\mathrm{e}^{-2t}\left(1-0,1\mathrm{e}^{1,8t}\right)$.

   **b.** Comme $40\mathrm{e}^{-2t}>0$, quel que soit le réel $t$, le signe de $g'(t)$ est donc celui de la différence $1-0,1\mathrm{e}^{1,8t}$.
   Or le logiciel de calcul formel dit que les nombres solutions de l'inéquation $1-0,1\mathrm{e}^{1,8t}>0$ sont les réels inférieur à $\dfrac{5}{9}\ln(10)\approx 1,28>0$.

On en déduit le signe de $g'(t)$ :

- sur $\left[0\,;\,\dfrac{5}{9}\ln(10)\right[$, $g'(t) > 0$;
- $g'\left(\dfrac{5}{9}\ln(10)\right) = 0$;
- sur $\left]\dfrac{5}{9}\ln(10)\,;\,+\infty\right[$, $g'(t) < 0$.

**c.** La question précédente permet d'établir que :

- sur $\left[0\,;\,\dfrac{5}{9}\ln(10)\right[$, $g'(t) > 0$, donc la fonction $g$ est croissante sur cet intervalle;
- $g'\left(\dfrac{5}{9}\ln(10)\right) = 0$ $g\left(\dfrac{5}{9}\ln(10)\right)$ est un maximum de la fonction $g$;
- sur $\left]\dfrac{5}{9}\ln(10)\,;\,+\infty\right[$, $g'(t) < 0$, donc la fonction $g$ est décroissante sur cet intervalle.

**d.** Le résultat précédent a montré que le maximum de $g$ est $g\left(\dfrac{5}{9}\ln(10)\right) = 20\left(\mathrm{e}^{-0,2\times\frac{5}{9}\ln(10)} - \mathrm{e}^{-2\times\frac{5}{9}\ln(10)}\right) \approx$ 13,94, soit 13,9 au dixième près $\left(\text{en}\,\mu\text{g.L}^{-1}\right)$.

**2.** On a vu dans la partie A que l'aire sous la courbe est égale à $100\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)$ et on admet que l'aire sous la courbe associée à l'administration orale est d'environ 85,02.

Donc la « biodisponibilité absolue » de cet antibiotique est environ $\dfrac{85,02}{100\left(1-\mathrm{e}^{-3}\right)} \approx 0,894\,7$, soit 89 % environ.

**Partie C.**

**1.** $u_2 = 0,5u_1 + 20 = 0,5\times 20 + 20 = 30$.

La concentration plasmatique de l'antibiotique immédiatement après la deuxième injection est 30 $\mu$ g.L$^{-1}$.

**2. a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - 40 = 0,5u_n + 20 - 40 = 0,5u_n - 20 = 0,5(v_n + 40) - 20 = 0,5v_n + 20 - 20 = 0,5v_n$.

Donc $v_{n+1} = 0,5v_n$, pour tout entier $n \geqslant 1$; cette relation montre que la suite $(v_n)$ est une suite géométrique de raison $q = 0,5$ et de premier terme $v_1 = u_1 - 40 = 20 - 40 = -20$.

**b.** La suite $(v_n)$ étant géométrique, on sait d'après le formulaire que : $v_n = v_1 q^{n-1} = -20 \times 0,5^{n-1}$.

Or $v_n = u_n - 40 \iff u_n = v_n + 40 = 40 - 20\times 0,5^{n-1}$.

On a donc pour $n \geqslant 1$, $\quad u_n = 40 - 20\times 0,5^{n-1}$.

**c.** On peut écrire $u_n = 40 - 20\times 0,5^{n-1} = 40 - 20\times 0,5^{n-1}\times(0,5\times 2) = 40 - 20\times 0,5^{n}\times 2) = 40 - 40\times 0,5^{n}$.

**d.** La limite de la suite géométrique $(v_n)$ est égale à 0 car sa raison 0,5 est comprise entre 0 et 1; la limite de la suite $(u_n)$ est donc égale à 40.

**3. a.**

```
n ← 1
u ← 20
Tant que u < 38
n ← n + 1
u ← 0,5 × u + 20
Fin de Tant que
```

**b.** En faisant tourner cet algorithme on calcule les termes de la suite $(u_n)$ :

| $n$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|
| $u$ | 20 | 30 | 35 | 37,5 | 38,75 |

Il faut donc 5 injections pour atteindre cet équilibre.

**Exercice 2**

**Partie A.**

1. D'après l'énoncé on a $\text{E}(T) = 2 = \dfrac{1}{\lambda}$, soit $\lambda = \dfrac{1}{2}$.
2. **a.** D'après la formule donnée, on a $P(T < 1) = P(T \leqslant 1) = 1 - \text{e}^{-\frac{1}{2}\times 1} \approx 0{,}393\,4$, soit 0,393 au millième près.

   **b.** De même $P(T > 3) = 1 - P(T \leqslant 3) = 1 - \left(1 - \text{e}^{-0{,}5\times 3}\right) = \text{e}^{-0{,}5\times 3} = \text{e}^{-1{,}5} \approx 0{,}223\,1$ soit 0,223 au millième près.
3. Une meuleuse a en moyenne une panne toutes les 2 semaines ; donc sur une période de un an soit $26 \times 2$ semaines, le nombre de pannes moyen par meuleuse sera de 26.

**Partie B.**

1. **a.** On trouve pour exactement 20 pannes : $\approx 0{,}04184$,soit 0,042 au millième près.

   **b.** Pour au maximum 22 pannes on trouve au millième 0,252.
2. Une meuleuse est défaillante si $P(X > 40) = 1 - P(X \leqslant 40) \approx 1 - 0{,}996 \approx 0{,}004$.

**Partie C.**

1. Soit l'épreuve de Bernoulli considérant une seule meuleuse ayant une probabilité d'être défaillante de probabilité 0,004.

   Le fait de choisir de façon indépendante 1 000 meuleuses est donc un schéma de Bernoulli et la variable $Y$ comptant le nombre de meuleuses défaillantes suit la loi binomiale de paramètres $n = 1\,000$ et $p = 0{,}004$.
2. **a.** La loi de la variable aléatoire $Y$ est approchée par la loi normale de moyenne :
   $np = 1\,000 \times 0{,}004 = 4$ et d'écart type $\sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1\,000 \times 0{,}004 \times (1 - 0{,}0{,}004)} = \sqrt{4 \times 0{,}996} = \sqrt{3{,}984} \approx 1{,}996$, soit 2 à $10^{-1}$ près.

   **b.** $Z$ suivant la loi normale de moyenne 2 et d'écart type 4, la calculatrice donne
   $P(2{,}5 \leqslant Z \leqslant 7{,}5) \approx 0{,}733$.

**Partie D.**

1. 85 clients sur 100 sont satisfaits, donc une estimation ponctuelle $f$ de la proportion $p$ est $f = \dfrac{85}{100} = 0{,}85$.
2. D'après la formule donnée l'intervalle de confiance centré sur $f$ de la proportion $p$ avec une confiance de 99 % est :
   $\left[f - 2{,}58\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 2{,}58\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}}\right] = \left[0{,}85 - 2{,}58\sqrt{\dfrac{0{,}85(1-0{,}85)}{100}}\ ;\ 0{,}85 + 2{,}58\sqrt{\dfrac{0{,}85(1-0{,}85)}{100}}\right] \approx$
   $[0{,}758\ ;\ 0{,}942]$.
3. L'intervalle de confiance est à 99 %, donc il n'est pas certain que la proportion $p$ appartienne à cet intervalle.