Corrigé du brevet de technicien supérieur Opticien–lunetier 12 mai 2016

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Étude d'une série statistique

1. Le coefficient de corrélation linéaire de la série $(x\,;\,z)$ est : $r \approx 0{,}9997$. à 10^{-4}
   On peut faire un ajustement affine de cette série e car $r \approx 1$.
2. Une équation de la droite de régression de z en x, selon la méthode des moindres carrés est :

$$z = 0,301x–2,945.$$

3.
   - Le premier jour ouvré du mois de mai 2016 correspond au rang 28.
   - Calculons la valeur de z avec l'équation de la droite d'ajustement précédente :

   $z = 0,301 \times 28 - 2,945 = 5,483$.
   - Déterminons maintenant y en sachant que $z = \ln\left(\dfrac{y}{200-y}\right)$

   $z = \ln\left(\dfrac{y}{200-y}\right) \iff \mathrm{e}^z = \dfrac{y}{200-y} \iff \mathrm{e}^z(200-y) = y \iff$
   $200\mathrm{e}^z - y\mathrm{e}^z = y \iff 200\mathrm{e}^z = y\left(1+\mathrm{e}^z\right) \iff y = \dfrac{200\mathrm{e}^z}{1+\mathrm{e}^z}$.
   On sait que $z \approx 5,483$, donc $y \approx \dfrac{200\mathrm{e}^5,483}{1+\mathrm{e}^5,483} \approx 199,2$, soit 199 centaines.
   Environ 19 900 verres ont été fabriqués le premier jour ouvré de mai 2016.

Partie B

1. En prenant l'expression de $f'(x)$ donnée par le logiciel à la première ligne soit :

$$f(x) = 1\,140\frac{\mathrm{e}^{-0,3x}}{\left(19\mathrm{e}^{-0,3x}+1\right)^2}.$$

   On sait que quel que soit le réel ,t, $\mathrm{e}^{-0,3x} > 0$, le dénominateur est un carré supérieur ou égal à 1, donc supérieur à 0 : $f'(x) > 0$ en particulier sur $[0\,;\,+\infty[$.
   Il en résulte que f est strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$.
2. **a.** D'après la troisième ligne du logiciel, la limite de $f(x)$ quand x tend vers $+\infty$ est égale à 200, ce qui montre que la courbe $\mathscr{C}$ a pour asymptote, au voisinage de plus l'infini, la droite d'équation $y = 200$.

   b. Prenons la valeur approchée de l'intégrale donnée par le logiciel à la deuxième ligne :
   La valeur moyenne demandée est :

$$\frac{1}{24-0}\int_0^{24} f(x)\,\mathrm{d}x \approx \frac{2\,812{,}235\,459\,513}{24} \approx 117,18.$$

3. **a.** La fonction f est continue, strictement croissante sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ et quel que soit x, $\quad f(x) < 200,$; donc l'entreprise ne peut pas envisager, dans ces conditions, de produire 250 centaines de verres par jour.

   b. D'après la question 2. b., le nombre moyen de verres fabriqués par jour pendant cette période de 24 mois est de $117,18 \times 100 = 11\,718$.

Partie C

1. Le nombre de clients en mars 2014 est représenté par u2 On a $u_1 = 0,98u_0 + 6 = 0,98 \times 120 + 6 = 123,6$, soit en arrondissant 124 clients en février 2014

   $u_2 = 0,98u_1 + 6 = 0,98 \times 123,6 + 6 = 127,12 \approx 127$

   Le nombre de clients de l'entreprise en mars 2014 est estimé selon ce modèle à 127.

2. L'algorithme qui réalise l'objectif recherché est l'algorithme 3.

3. **a.** Calculons v_{n+1} en fonction de v_n :

   $v_{n+1} = 300 - u_{n+1}$ (relation entre v_n et u_n écrite au rang $n+1$)

   On obtient ensuite v_{n+1} en fonction de u_n (avec la relation de récurrence) :

   $v_{n+1} = 300 - (0,98u_n + 6) = 294 - 0,98u_n$, soit en factorisant par 0,98

   $v_{n+1} = 294 \times \dfrac{0,98}{0,98} - 0,98u_n = 0,98 \times \dfrac{294}{0,98} - 0,98u_n =$

   $0,98 \times 300 - 0,98u_n = 0,98\,(300 - u_n) = 0,98v_n$.

   Conclusion : quel que soit le naturel n, $\quad v_{n+1} = 0,98v_n$, ce qui montre que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 0,98$.

   b. La suite (v_n) étant géométrique de 1$^{\text{er}}$ terme $v_0 = 180$ et de raison $q = 0,98$ on sait que pour tout entier naturel n

   $$v_n = v_0 q^n = 180 \times 0,98^n.$$

   Or $v_n = 300 - u_n \iff u_n = 300 - v_n = 300 - 180 \times 0,98^n$, pour tout entier naturel n.

   c. Comme $0 < 0,98 < 1$, on sait $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,98^n = 0$ et par conséquent

   $\lim\limits_{n\to+\infty} 300 \times 0,98^n = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 300$.

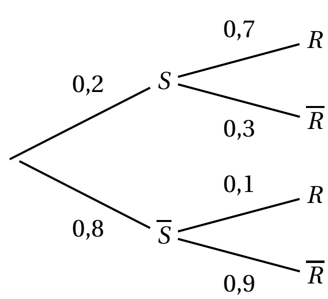
   La limite de la suite (u_n) est égale à 300.

   Interprétation : à long terme, le nombre de clients dans cette entreprise va se rapprocher de 300 clients.

Exercice 2 **10 points**

Partie A

1.



2. $P(S \cap R) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$.

3. $P(R) = P(S \cap R) + P\left(\overline{S} \cap R\right) = 0,14 + 0,8 \times 0,1 = 0,14 + 0,08 = 0,22.$
La probabilité que le fichier prélevé soit celui d'un client ayant demandé le traitement antireflet de ses verres est bien égale à 0,22.

4. $P_R(S) = \dfrac{P(S \cap R)}{P(R)} = \dfrac{0,14}{0,22} \approx 0,636.$

Partie B

1. Pour chacun des 100 fichiers, de deux choses l'une : ou c'est celui d'un client ayant demandé un traitement anti-reflet, soit il ne l'a pas demandé. La variable aléatoire comptant le nombre de ceux qui l'on demandé suit donc une loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p : 0,45$.

2. **a.** On lit dans le tableur, colonne B, ligne 7 : $P(X = 50) \approx 0,048\,152 \approx 0,048$ à 10^{-3} près.

b. À la colonne C et ligne 12 du tableur on lit : $P(X \leqslant 55) \approx 0,982\,359$.
Donc le plus petit entier a tel que $P(X \leqslant a) \geqslant 0,975$ est 55.

3. **a.** On a bien $m = n \times p = 100 \times 0,45 = 45$.
Pour l'écart type : $\sigma = \sqrt{n \times p(1-p)} = \sqrt{100 \times 0,45 \times (1-0,45)} = \sqrt{100 \times 0,45 \times 0,55} = \sqrt{45 \times 0,55} = \sqrt{24,75} \approx 4,9749 \approx 4,975.$

b. La calculatrice donne $P(Z \geqslant 49,5) \approx 0,183$.

Partie C

1. La probabilité d'avoir exactement quatre clients achetant des verres polarisants un samedi après-midi est : 0,134.

2. La probabilité qu'un samedi après-midi, il y ait au plus deux clients achetant des verres polarisants est : 0,062.

Partie D

1. L'estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p est : $f = \dfrac{135}{150} = 0,9$.

2. L'expression de l'intervalle de confiance recherché est :
$$\left[f - t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + t\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$
Avec : $f = 0,9$; $n = 150$ et $t = 1,96$ (car le niveau de confiance est de 95%)
$t\sqrt{\dfrac{f(1-f)}{n}} = 1,96\sqrt{\dfrac{0,9 \times 0,1}{150}} \approx 0,0488$ soit 0,05 à à 10^{-2} près.
L'intervalle de confiance de la proportion p avec le niveau de confiance de 95 % est donc l'intervalle $[0,85\ ;\ 0,95]$.

3. Le niveau de confiance de 95 % signifie qu'environ 95 % des intervalles qu'on peut obtenir ainsi contiennent la proportion p de la population. Donc on n'est pas certain que la proportion p appartienne à l'intervalle de confiance obtenu à la question précédente.