Corrigé du brevet de technicien supérieur Opticien–lunetier 13 mai 2015

Exercice 1 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante

A. Modélisation de la concentration du produit dans le sang

1. **a.** Les points du second graphique semblent effectivement être sensiblement alignés.

   b. L'ajustement se justifie quand le coefficient de corrélation linéaire est en valeur absolue proche de 1 : les résultats du tableau confirment qu'il vaut mieux chercher un ajustement affine de z en t.
2. La calculatrice donna après arrondi au millième des coefficients : $z = -0,250t + 2,983$.
3. On a donc $z = \ln C = -0,250t + 2,983$ soit $C = \mathrm{e}^{-0,250t+2,983} = \mathrm{e}^{-0,250t} \times \mathrm{e}^{2,983}$.
   Or $\mathrm{e}^{2,983} \approx 19,75 \approx 20 = C_0$ à l'unité près.
   Finalement l'ajustement exponentiel est $C(t) = 20\mathrm{e}^{-0,250t}$.
   On a $C(0) = C_0 = 20$: c'est la concentration au temps $t = 0$.
4. Il faut résoudre l'inéquation :
   $20\mathrm{e}^{-0,250t} < 1,5$ soit $\mathrm{e}^{-0,250t} < \dfrac{1,5}{20}$ d'où en prenant le logarithme népérien :
   $-0,25t < \ln\left(\dfrac{1,5}{20}\right)$ puis $t > \dfrac{1}{-0,25}\ln\left(\dfrac{1,5}{20}\right)$ et enfin $t > -4\ln\left(\dfrac{1,5}{20}\right)$.
   La calculatrice donne $-4\ln\left(\dfrac{1,5}{20}\right) \approx 10,36$, soit 10 h et 0,36 h c'est-à-dire 10 h et $0,36 \times 60 = 21,6$.
   La concentration sera inférieure à 1,5 au bout de 10 h 22 min.

B. Modélisation de la concentration dans l'humeur aqueuse

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) sont les fonctions définies et dérivables sur $[0~;~+\infty[$ de la forme $f(t) = k\mathrm{e}^{-0,05t}$.
2. On a $h'(t) = -0,25\lambda\mathrm{e}^{-0,25t}$, donc h est une solution de (E) si :
   $-0,25\lambda\mathrm{e}^{-0,25t} + 0,05\lambda\mathrm{e}^{-0,25t} = 0,05\times20\mathrm{e}^{-0,25t}$ soit $-0,25\lambda + 0,05\lambda = 1$ ou $-0,2\lambda = 1$ et enfin $\lambda = -5$.
3. Les solutions de (E) sont les les fonctions somme d'une solution particulière (trouvée à la question précédente) et de toutes les fonctions solutions de l'équation (E_0), donc les fonctions qui s'écrivent :

$$f(t) = k\mathrm{e}^{-0,05t} - 5\mathrm{e}^{-0,25t}, \text{ avec } k \in \mathbb{R}.$$

4. La condition $f(0) = 0$ entraîne :
   $k\mathrm{e}^{-0,05\times0} - 5\mathrm{e}^{-0,25\times0} = 0$ soit $k - 5 = 0$ ou $k = 5$.
   La solution f de l'équation différentielle (E) vérifiant la condition initiale $f(0) = 0$ est la fonction $f(t) = 5\mathrm{e}^{-0,05t} - 5\mathrm{e}^{-0,25t}$.

C. Exploitation du modèle précédent

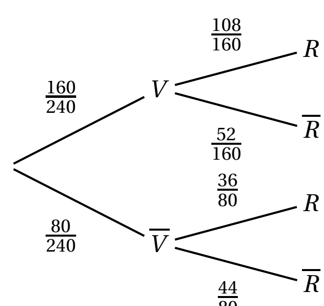
1. La concentration moyenne est égale à :
$\dfrac{1}{12}\displaystyle\int_0^{12} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{12}\left(\left[20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}t} - 100\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}t} + c_2\right]_0^{12}\right) =$
$\dfrac{1}{12}\left(20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 12} - 100\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}\times 12} + c_2 - 20\mathrm{e}^{-\frac{1}{4}\times 0} + 100\mathrm{e}^{-\frac{1}{20}\times 0} - c_2\right) =$
$\dfrac{1}{12}\left(20\mathrm{e}^{-3} - 100\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}} - 20 + 100\right) = \dfrac{1}{12}\left(80 + 20\mathrm{e}^{-3} - 100\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}}\right) =$
$\dfrac{1}{3}\left(20 + 5\mathrm{e}^{-3} - 25\mathrm{e}^{-\frac{3}{5}}\right)$.
La calculatrice donne $m \approx 2,18$ (μg/L).
2. • Graphiquement, on lit que la fonction a un maximum en $t = 8$ qui vaut à peu près 2,75.
• En utilisant les variations de la fonction :
$f'(t) = -0,25\mathrm{e}^{-0,05t}\left(1 - 5\mathrm{e}^{-0,2t}\right) = 0,25\mathrm{e}^{-0,05t}\left(5\mathrm{e}^{-0,2t} - 1\right)$.
On sait que quel que soit le réel t, $\mathrm{e}^{-0,05t} > 0$, donc le signe de $f'(t)$ est celui de la différence $5\mathrm{e}^{-0,2t} - 1$.
– Si $5\mathrm{e}^{-0,2t} - 1 > 0$, alors $5\mathrm{e}^{-0,2t} > 1$ ou $\mathrm{e}^{-0,2t} > 0,2$ d'où en prenant le logarithme : $-0,2t > \ln 0,2$ et enfin $t < -\dfrac{\ln 0,2}{0,2}$.
– Si $5\mathrm{e}^{-0,2t} - 1 < 0$, alors $5\mathrm{e}^{-0,2t} < 1$ ou $\mathrm{e}^{-0,2t} < 0,2$ d'où en prenant le logarithme : $-0,2t < \ln 0,2$ et enfin $t > -\dfrac{\ln 0,2}{0,2}$.
La fonction est donc croissante sur $\left[0\,;\,-\dfrac{\ln 0,2}{0,2}\right]$ puis décroissante sur $\left[-\dfrac{\ln 0,2}{0,2}\,;\,+\infty\right[$.
Conclusion f a un maximum en $-\dfrac{\ln 0,2}{0,2} \approx 8,05$ qui est égal à $f\left(-\dfrac{\ln 0,2}{0,2}\right) =$
$5\mathrm{e}^{0,25\ln 0,2} - 5\mathrm{e}^{1,25\ln 0,2} \approx 2,674$ soit 2,67 μg/L au centième près au bout de 8 h 0,05 h soit 8 h 3 min environ. (ce résultat est plus précis)
3. Le graphique permet de voir que la concentration reste supérieure à 2 μg/L de la 3^e^ à la 18^e^ heure soit pendant 15 heures donc plus que 10 heures.

Exercice 2 **10 points**

Les trois parties de cet exercice peuvent être traitées de façon indépendante.
Dans cet exercice, les résultats approchés sont, sauf mention du contraire, à arrondir à 10^{-3}.

A. Probabilités conditionnelles

1.



2. La première branche donne :
$P(V \cap R) = P(V) \times P_V(R) = \dfrac{160}{240} \times \dfrac{108}{160} = \dfrac{2 \times 27}{3 \times 40} = \dfrac{9}{20} = 0,45.$
3. On a de même :
$P\left(\overline{V} \cap R\right) = P\left(\overline{V}\right) \times P_{\overline{V}}(R) = \dfrac{80}{240} \times \dfrac{36}{80} = \dfrac{1 \times 9}{3 \times 20} = \dfrac{3}{20} = 0,15.$
Donc $P(R) = P(V \cap R) + P\left(\overline{V} \cap R\right) = 0,45 + 0,15 = 0,6.$

4. Il faut trouver $P_R(V) = \dfrac{P(R \cap V)}{P(R)} = \dfrac{0,45}{0,60} = \dfrac{45}{60} = \dfrac{3}{4} = 0,75$.

On peut aussi construire un tableau :

	V	$\overline{V}$	total
R	108	36	144
$\overline{R}$	52	44	96
total	160	80	240

Ainsi $P(R \cap V) = \dfrac{108}{240} = \dfrac{9 \times 3 \times 4}{4 \times 3 \times 20} = \dfrac{9}{20} = 0,45$, etc.

B. Loi binomiale

1. On répète 160 fois de façon indépendante l'expérience qui consiste à tirer une fiche parmi 240 avec une probabilité d'avoir un répondeur de 0,6, on a donc un schéma de Bernoulli et la variable aléatoire X donnant le nombre dede répondeurs suit la loi binomiale de paramètres $n = 160$ et $p = 0,6$.

2. On sait que $E = n \times p = 160 \times 0,6 = 96$.

Ceci signifie qu'en moyenne sur un grand nombre de tirages on aura 96 répondeurs par tranche de 160 fiches prélevées.tirages.

3. **a.** La calculatrice donne $P(X = 96) \approx 0,064$.

b. De même la calculatrice donne $P(X \leqslant 107) \approx 0,969$ et $P(X \geqslant 108) = 1 - P(X \leqslant 107) \approx 0,031$.

C. Loi normale et test d'hypothèse

1. En utilisant la propriété : $h = 2 \times 0,067 = 0,134$. D'où :
$P(-0,134 \leqslant D \leqslant 0,134) = 0,95$.

2. Sur 160 personnes ayant reçu de la vertéporfine la fréquence des répondeurs est F_1.

Sur 80 ayant reçu le placébo, la fréquence des répondeurs est F_2.

- Si $F_1 - F_2 \in [-0,134\ ;\ 0,134]$, on accepte l'hypothèse H_0 ;
- Si $F_1 - F_2 \notin [-0,134\ ;\ 0,134]$, on rejette l'hypothèse H_0.

3. On a donc $F_1 = \dfrac{108}{160}$ et $F_2 = \dfrac{36}{80} = \dfrac{72}{160}$.

D'où $F_1 - F_2 = \dfrac{108}{160} - \dfrac{72}{160} = \dfrac{108 - 72}{160} = \dfrac{36}{160} = \dfrac{9}{40} = 0,225$.

On a donc $0,225 \notin [-0,134\ ;\ 0,134]$: on rejette donc l'hypothèse H_0 au seuil de 5 %.

Conclusion : la différence de proportions de répondeurs entre les personnes qui ont reçu de la vertéporfine et celles qui ont reçu un placébo est significative au seuil de 5 %.