∽ Brevet de technicien supérieur ∾ Opticien–lunetier 14 mai 2013

Exercice 1 **10 points**

A. Statistique à deux variables

1. Les points ne sont pas sensiblement alignés : un ajustement affine de y en t n'est pas approprié.

2. **a.** La calculatrice livre $z = -0,82t + 5,86$.
   b. $z = \ln(y - 632) = -0,82t + 5,86$ d'où $y - 632 = \mathrm{e}^{-0,82t+5,86}$ puis $y = 632 + \mathrm{e}^{-0,82t+5,86}$.
   Or $\mathrm{e}^{-0,82t+5,86} = \mathrm{e}^{-0,82t} \times \mathrm{e}^{5,86} = 350,72\mathrm{e}^{-0,82t}$, donc finalement :

$$y = 632 + 350,72\mathrm{e}^{-0,82t}$$

B. Résolution d'une équation différentielle

$$(E) : \quad 1,22y' + y = 632$$

1.
$$(E_0) : \quad 1,22y' + y = 0.$$

   On sait que les solutions de (E_0) sont les fonctions de la forme : $y = K\mathrm{e}^{-\frac{t}{1,22}}$, $K \in \mathbb{R}$.
2. Avec $g(x) = 632$, $g'(x) = 0$, donc $1,22 \times 0 + 632 = 632$ est vraie donc g est une solution particulière de (E).
3. En ajoutant une solution particulière à toutes les solutions de l'équation sans second membre on obtient toutes les solutions de (E) soit les fonctions $y(t) = K\mathrm{e}^{-\frac{t}{1,22}} + 632$, $K \in \mathbb{R}$.
4. On a $f(0) = 983$ si $K\mathrm{e}^{-\frac{0}{1,22}} + 632 = 983$, soit $K + 632 = 983$,d'où $K = 351$.
   Conclusion $f(t) = 351\mathrm{e}^{-\frac{0}{1,22}} + 632$.

C. Étude d'une fonction

$$f(t) = 632 + 351\mathrm{e}^{-0,82t}.$$

1. **a.** On remarque que $-\dfrac{1}{1,22} \approx -0,819 \approx -0,82$ au centième près, donc f est la solution de l'équation (E) trouvée à la question précédente, elle vérifie : $1,22f'(t) + f(t) = 632$, d'où $f'(t) = \dfrac{632 - f(t)}{1,22} = \dfrac{-351\mathrm{e}^{-0,82t}}{1,22} \approx -0,82 \times 351\mathrm{e}^{-0,82t}$.
   $f'(t) = -287,82\mathrm{e}^{-0,82t}$.
   b. On sait que quel que soit le réel t, $\mathrm{e}^{-0,82t} > 0$, donc $f'(t) < 0$ sur $[0 ; +\infty[$.
   c. La fonction f est donc décroissante sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$.
2. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,82t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 632$.

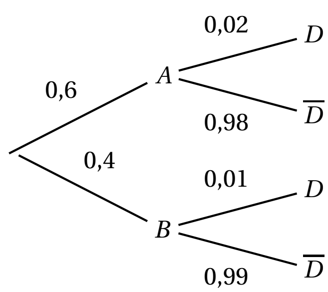
b. Le résultat précédent signifie que la droite dont une équation est $y = 632$ est asymptote à C au voisinage de plus l'infini.

c. Une équation de tangente au point $(0\ ;\ f(0)) = (0\ ;\ 983)$ est
$y - f(0) = f'(0)(x-0)$.
Avec $f(0) = 983$ et $f'(0) = -287,82$, on obtient :
$(T)\quad y - 983 = -287,82(x-0)$ ou $y = -287,82x + 983$.

Exercice 2 **10 points**

A. Probabilités conditionnelles

1. On peut dresser l'arbre pondéré suivant :



$P(B \cap D) = p(B) \times p_B(D) = 0,4 \times 0,01 = 0,004$.

2. On a de même $P(A \cap D) = p(A) \times p_A(D) = 0,6 \times 0,02 = 0,012$.
D'après la loi des probabilités totales :
$p(D) = P(A \cap D) + P(B \cap D) = 0,012 + 0,004 = 0,016$.

3. $P_D(B) = \dfrac{P(B \cap D)}{p(D)} = \dfrac{0,004}{0,016} = \dfrac{4}{16} = \dfrac{1}{4} = 0,25$.

B. Loi binomiale. loi de Poisson et loi normale

1. Le stock est suffisamment important pour assimiler un prélèvement de n verres semi-finis à un tirage avec remise de n verres avec une probabilité considérée comme constante de trouver un verre défectueux de 0,016, donc la variable aléatoire X suit une loi binomiale de paramètres n et$p = 0,016$.

2. **a.** On a $\text{E} = np = 250 \times 0,016 = 4$.
Ceci signifie qu'en moyenne sur 250 verres prélevés on en trouvera 4 défectueux.

b. La probabilité qu'aucun verre ne soit défectueux est égale à :
$\binom{250}{0} \times 0,016^0 \times (1-0,016)^{250} \approx 0,0177$ soit 0,018 au millième près.

c. La probabilité qu'au moins un verre soit défectueux est donc égale à
$1 - 0,018 = 0,982$.

d. Le paramètre λ de cette loi de Poisson vérifie $\lambda = np = 4$.

e. On a $P(Y \geqslant 1) = 1 - PY = 0) = 1 - 0,018 = 0,982$ (par lecture de la table).

3. Dans cette question $n = 1000$.

a. Ici $\mathscr{B}(n\ ;\ p) \approx \mathscr{N}(m\ ;\ \sigma)$.
On sait que $m = np = 1000 \times 0,016 = 16$ et que $\sigma\sqrt{npq} = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \times 0,016 \times 0,984} = \sqrt{16 \times 0,984} \approx 3,97$.

b. Considérons la variable aléatoire Z' centrée réduite, donc définie par
$Z' = \dfrac{Z-16}{3,97}$.
On sait qu'alors la variable Z' suit la loi normale $\mathscr{N}(0\ ;\ 1)$.
On a alors $P(Z \geqslant 17,5) = p\left(Z' \geqslant \dfrac{17,5-16}{3,97}\right) = p(Z' \geqslant 0,38) = 1 - \Pi(0,38) \approx 1 - 0,6480 \approx 0,352$, soit 0,35 au centième près.

C. Intervalle de confiance

1. On a $f = \dfrac{70}{100} = 0,7$, soit $p \approx 0,7$.
2. On sait que $I = \left[f - x\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\ ;\ f + x\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\right]$ avec x tel que :

   $p\left(f - x\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}} \leqslant F \leqslant f + x\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}\right) = 0,95$.

   Avec $Z'' = \dfrac{F - f}{\sqrt{\frac{f(1-f)}{n-1}}}$, cette variable aléatoire Z'' suit la loi normale $\mathcal{N}(0\ ;\ 1)$, donc :

   $p(-x \leqslant Z'' \leqslant x) = 0,95$ ou $2\Pi(x) - 1 = 0,95$ c'est-à-dire $\Pi(x) = 0,975 = \Pi(1,96)$.

   On a donc $x = 1,96$ et l'intervalle I est tel que :

   $I = \left[0,7 - 1,96\sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{99}}\ ;\ 0,7 + 1,96\sqrt{\frac{0,7(1-0,7)}{99}}\right]$

   Donc $I = [0,61\ ;\ 0,79]$ au centièmes près.
3. Non on ne peut affirmer que p appartient à cet intervalle de confiance.

   En prenant un très grand nombre d'échantillons, 95 % d'entre eux contiendraient p, mais pas tous.