∾ Brevet de technicien supérieur ∾
Opticien –lunetier session 2008

Exercice 1 **10 points**

Partie A

1. On sait que les solutions sont de la forme $t \longmapsto K\text{e}^t$, où $K \in \mathbb{R}$.
2. Avec $h(t) = at+b$, $\;h'(t) = a$, donc h est solution de (E) si et seulement si :
   $a-(at+b) = -t \iff -at+(a-b) = -t+0$ d'où en identifiant :
   $a = 1$ et $a-b = 0 \iff a = b = 1$.
   La fonction $t \longmapsto t+1$ est une solution particulière de (E).
3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions :
   $f\,:\, t \longmapsto t+1+K\text{e}^t$, où $K \in \mathbb{R}$.
4. Il faut trouver la fonction f telle que :
   $f(0) = 2 \iff 1+K\text{e}^0 = 2 \iff 1+K = 2 \iff K = 1$.
   La solution est donc la fonction : $f\,:\, t \longmapsto t+1+\text{e}^t$.

Partie B

1. La fonction g (qui est la fonction de la question précédente) vérifie donc $g'-g = -t \iff$
   $g' = g-t = t+1+\text{e}^t-t = 1+\text{e}^t$.
   Comme $\text{e}^t > 0$, quel que soit le réel t, on a donc $g'(t) > 0$: la fonction g est strictement croissante de $g(-2) = -1+\text{e}^{-2} \approx -0,865$ à $g(2) = 3+\text{e}^3 \approx 23,09$.
2. La fonction g est continue car dérivable sur $[-2\,;\,2]$ et strictement croissante de $g(-2) < 0$ à $g(2) > 0$: il existe donc un réel unique $\alpha \in [-2\,;\,2]$ tel que $g(\alpha) = 0$.
   La calculatrice donne :
   $g(-2) \approx -0,9$ et $g(-1) \approx 0,4$, donc $-2 < \alpha < -1$;
   $g(-1,3) \approx -0,03$ et $g(-1,2) \approx 0,1$, donc $-1,3 < \alpha < -1,2$;
   $g(-1,28) \approx -0,002$ et $g(-1,27 \approx 0,01$, d'où $-1,28 < \alpha < -1,27$.
3. On peut donc en déduire que :
   – sur $[-2\,;\,\alpha[$, $g(t) < 0$;
   – sur $[\alpha\,;\,2]$, $g(t) > 0$.

Partie C

Soit f la fonction définie sur $[-2\,;\,2]$ par : $f(t) = \dfrac{t\cdot\text{e}^t}{\text{e}^t+1}$.

1. En dérivant f comme un quotient, on obtient :
   $f'(t) = \dfrac{\left(\text{e}^t+t\text{e}^t\right)\left(\text{e}^t+1\right)-\text{e}^t\times t\text{e}^t}{\left(\text{e}^t+1\right)^2} = \dfrac{\text{e}^{2t}+\text{e}^t+t\text{e}^{2t}+t\text{e}^t-t\text{e}^{2t}}{\left(\text{e}^{2t}+1\right)^2} = \dfrac{\text{e}^{2t}+\text{e}^t+t\text{e}^t}{\left(\text{e}^{2t}+1\right)^2} =$
   $\dfrac{\text{e}^t\left(\text{e}^t+1+t\right)}{\left(\text{e}^{2t}+1\right)^2} = \dfrac{g(t)\cdot\text{e}^t}{\left(\text{e}^t+1\right)^2}$.

2. On sait que quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $\text{e}^t > 0$ et $\left(\text{e}^t + 1\right)^2 > 0$, donc le signe de $f'(t)$ est celui de $g(t)$ trouvé à la question précédente, donc :

– sur $[-2\,;\,\alpha[$, $f'(t) < 0$, donc f est décroissante sur cet intervalle ;

– sur $[\alpha\,;\,2]$, $f'(t) > 0$, donc f est croissante sur cet intervalle.

Partie D

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f(t) & = & \dfrac{t\cdot \text{e}^t}{\text{e}^t+1} \\ y & = & g(t) & = & t+1+\text{e}^t \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [-2\,;\,2].$$

1.

x	-2		α		2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	
$f'(t)$		$+$		$+$	
$g(t)$			$\nearrow$		

2. Un vecteur directeur de la tangente T_1 à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_1 obtenu pour la valeur $t = \alpha$ a pour coordonnées $\left(f'(\alpha)\,;\,g'(\alpha)\right)$ soit $\approx (0\,;\,2,28)$.

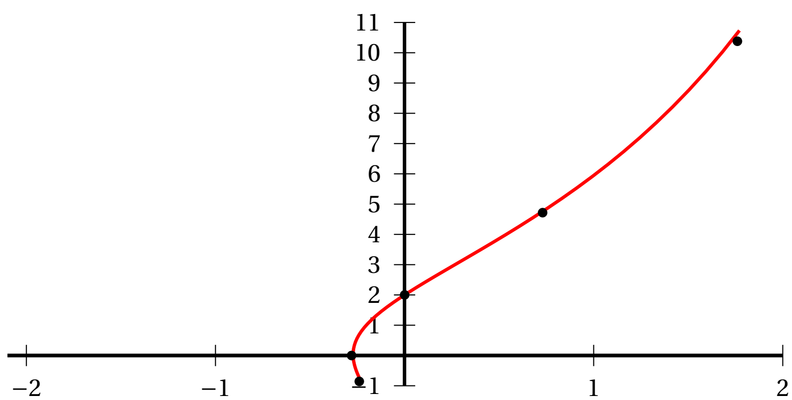
3. Un vecteur directeur de la tangente T_2 à la courbe $\mathscr{C}$ au point M_2 obtenu pour la valeur $t = 0$ a pour coordonnées $\left(f'(0)\,;\,g'(0)\right)$ soit $\left(\frac{1}{2}\,;\,2\right)$ ou $(1\,;\,4)$.

4. On sait que $g(\alpha) = 0$ soit $1 + \alpha + \text{e}^\alpha = 0 \iff \text{e}^\alpha = -1 - \alpha$.

Donc $f(\alpha) = \dfrac{\alpha \text{e}^\alpha}{\text{e}^\alpha + 1} = \dfrac{\alpha(-1-\alpha)}{-\alpha} = 1 + \alpha \approx -0,28$.

t	-2	$-1,28$	0	1	2
$f(t)$	$\approx -0,24$	$\approx -0,28$	0	$\approx 0,73$	$\approx 1,76$
$g(t)$	$\approx -0,86$	0	2	$\approx 4,72$	$\approx 10,38$

5.



Exercice 2 **10 points**

Les parties A et B sont indépendantes. Les résultats sont à arrondir au centième.

Au cours d'une année, le service ophtalmologie d'un centre hospitalier a examiné 5 000 patients. Pour chaque patient, une fiche a été remplie sur laquelle sont indiqués l'âge de la personne et le diagnostic posé.

Partie A

Le tableau suivant donne une répartition des sujets en classes d'âge.

1. **a.** Il y a $400+600+750=1\,750$ patients dont l'âge est strictement inférieur à 40 ans.
   $p(A)=\dfrac{1\,750}{5\,000}=0,35$.
   Il y a $5\,000-400=4\,600$ patients dont l'âge est supérieur ou égal à 20 ans.
   $p(B)=\dfrac{4\,600}{5\,000}=0,92$.
   Il y a $600+750=1\,350$ patients de au moins 20 ans et de moins de 40 ans.
   $p(A\cap B)=\dfrac{1\,350}{5\,000}=0,27$.

   b. On a $p_B(A)=\dfrac{p(A\cap B)}{p(B)}=\dfrac{0,27}{0,92}\approx 0,293$ soit 0,29 au centième près.

2. **a.** On a $p(X\geqslant 80)=\dfrac{350}{5\,000}=0,07$.
   Les prélèvements étant indépendants les uns des autres la variable X sui la loi binomiale $\mathscr{B}(40\ ;\ 0,07)$.

   b. On a $E=n\times 9=40\times 0,07=2,8$.
   L'écart-type est égal à $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}=\sqrt{40\times 0,07\times 0,93}\approx 1,61$.

   c. On a $p(X=3)=\binom{40}{3}0,07^3\times(1-0,07)^{40-3}\approx 0,231$ soit 0,23 au centième près.

3. **a.** Les deux lois ayant la même espérance on a $\lambda np=0,28$.

   b. On a $p(Y=3)=\dfrac{\mathrm{e}^{-2,8}\times 2,8^3}{3!}\approx 0,222$ soit 0,22 au centième près.

Partie B

1. L'estimation ponctuelle de la fréquence inconnue p est donnée par l'échantillon, donc
   $p=\dfrac{15}{60}=\dfrac{1}{4}=0,25$.
2. On a $\Pi(t)=1\dfrac{\alpha}{2}$, avec α facteur de risque. On a $\alpha=0,05$, d'où $\Pi(t)=0,975$.
   En utilisant la table de la loi normale centrée réduite on trouve $t=1,96$.
   L'intervalle de confiance au seuil de confiance 95 % est égal à :
   $\left[p-t\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\ ;\ p+t\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{n}}\right]\approx[0,14\ ;\ 0,36]$.