Corrigé du BTS Opticien–lunetier

16 mai 2025

Exercice 1 — 10 points

Partie A. Statistique

1. On trouve un coefficient de corrélation linéaire $r \approx 0{,}994$.
2. Le coefficient de corrélation est proche de 1 donc un ajustement affine de y en x est justifié.
3. À l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite de régression linéaire de y en x est $y = 0{,}8x + 13{,}7$.
4. Selon ce modèle la recette de l'usine pour un prix de vente égal à $x = 10$ euros est $y = 0{,}8 \times 10 + 13{,}7 = 21{,}7$ milliers d'euros soit 21700 euros.
5. L'écart entre la valeur donnée par un modèle statistique et la valeur réelle est $\dfrac{21700 - 19950}{19950} \approx 0{,}09$.

   Avec 9 % d'écart, on peut conclure que le modèle n'est pas fiable.

Partie B. Équation différentielle

1. Les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0{,}1y = 0$ sont les fonctions de la forme $y = k\mathrm{e}^{-0{,}1x}$ où k est une constante.
2. a. Pour tout réel x de l'intervalle $[0\,;+\infty[$

      on a $g'(x) = 5\mathrm{e}^{-0{,}1x} + 5x(-0{,}1)\mathrm{e}^{-0{,}1x} = (-0{,}5x + 5)\mathrm{e}^{-0{,}1x}$.

   b. Par conséquent pour tout $x \geqslant 0$, $g'(x) + 0{,}1g(x) = (-0{,}5x + 5)\mathrm{e}^{-0{,}1x} + 0{,}1 \times 5x\mathrm{e}^{-0{,}1x}$

      soit $g'(x) + 0{,}1g(x) = (-0{,}5x + 5 + 0{,}5x)\,\mathrm{e}^{-0{,}1x} = 5\mathrm{e}^{-0{,}1x}$ et la fonction g est une solution particulière de l'équation différentielle (E).
3. a. Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $h(x) = k\mathrm{e}^{-0{,}1x} + g(x)$

      soit $h(x) = (5x + k)e^{-0{,}1x}$.

   b. La condition initiale $h(5) = 17{,}72$ donne $(5 \times 5 + k)e^{-0{,}1 \times 5} = 17{,}72$

      donc $k = 17{,}72\mathrm{e}^{0{,}5} - 25 \approx 4{,}22$.

Partie C. Étude de fonction

On considère la fonction f définie pour tout réel x de l'intervalle $[5\,;\,15]$;
par $f(x) = (5x+4{,}22)\mathrm{e}^{-0{,}1x}$.

1. Au centième, $f(5) = (5\times 5+4{,}22)\mathrm{e}^{-0{,}1\times 5} = 29{,}22\mathrm{e}^{-0{,}5} \approx 17{,}72$
   et $f(15) = (5\times 15+4{,}22)\mathrm{e}^{-0{,}1\times 15} = 79{,}22\mathrm{e}^{-1{,}5} \approx 17{,}68$.
2. a. $f'(x) = (4{,}578-0{,}5x)\mathrm{e}^{-0{,}1x}$ est du signe de $4{,}578-0{,}5x$ sur l'intervalle $[5\,;\,15]$ car $\mathrm{e}^{-0{,}1x} > 0$ sur cet intervalle.

   $f'(x) \geqslant 0 \iff 4{,}578-0{,}5x \geqslant 0 \iff -0{,}5x \geqslant 4{,}578 \iff x \leqslant 9{,}156$ et on donne le signe de $f'(x)$ dans le tableau de variations de f ci-dessous.

   b. Au millième, $f(9{,}156) = (5\times 9{,}156+4{,}22)\mathrm{e}^{-0{,}1\times 9{,}156} = 50\mathrm{e}^{-0{,}9156} \approx 20{,}014$.

   c. On en déduit le tableau de variations de la fonction f sur l'intervalle $[5\,;\,15]$.

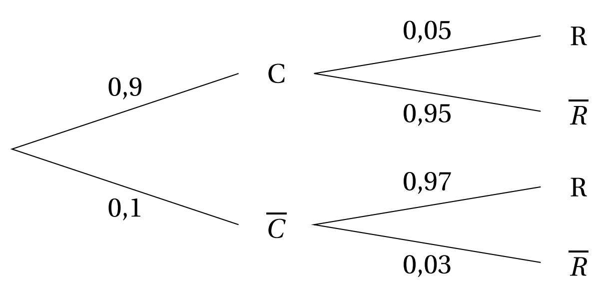
x	5		9,156		15
$f'(x)$		+	0	−	
f	17,72	↗	20,014	↘	17,68

3. Pour que la recette $f(x)$ soit maximale, il faut alors que le prix de vente soit $x = 9{,}16$ € et la recette est alors $f(9{,}16) \approx 20{,}014$ milliers d'euros soit 20 014 euros.

Exercice 2 — 10 points

Partie A. Probabilités conditionnelles

1. On a complété l'arbre.



2. La probabilité que la monture soit conforme et refusée est
   $P(C\cap R) = P(C)\times P_C(R) = 0{,}9\times 0{,}05 = 0{,}045$.

3. La probabilité que la monture soit refusée est
   $P(R) = P(C \cap R) + P(\overline{C} \cap R) = 0{,}045 + 0{,}1 \times 0{,}97 = 0{,}142$.
4. Un technicien affirme : « Parmi les montures refusées, plus du quart sont conformes ».
   Il affirme donc que $P_R(C) > \dfrac{1}{4}$.
   Vérifions : $P_R(C) = \dfrac{P(R \cap C)}{P(R)} = \dfrac{0{,}045}{0{,}142} \approx 0{,}317 > 0{,}25$.
   Le technicien a raison.
5. La probabilité que la machine commette une erreur est
   $P(C \cap R) + P(\overline{C} \cap \overline{R}) = 0{,}045 + 0{,}1 \times 0{,}03 = 0{,}048$.

Partie B. Loi binomiale et loi normale

1. La variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 1000$ et $p = 0{,}142$.
2. La probabilité qu'au plus 12 % des montures de l'échantillon aient été refusées est $P(X \leqslant 120) \approx 0{,}024$ au millième.
3. On approche la variable aléatoire X par une variable aléatoire Y suivant une loi normale de même moyenne $m = np = 1000 \times 0{,}142 = 142$ et de même écart-type
   $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{1000 \times 0{,}142 \times 0{,}858} \approx 11$.
4. Par symétrie, $b = m = 142$. On reconnaît que $[a\,;\,c]$ est l'intervalle à plus ou moins deux écarts-types donc $a = 142 - 2 \times 11 = 120$ et $142 + 2 \times 11 = 164$.

Partie C. Test d'hypothèse

1. $P(3 - h < \overline{L} < 3 + h) = 0{,}95 \iff h = 2 \times \dfrac{0{,}1}{\sqrt{400}} = 0{,}01$.
   L'intervalle d'acceptation de H_0 est donc $[3 - 0{,}01\,;\,3 + 0{,}01] = [2.99\,;\,3.01]$.
2. On prélève un échantillon de 400 vis et on calcule la moyenne $\overline{l}$ des longueurs des vis de cet échantillon.
   Si $\overline{l} \in [2{,}99\,;\,3{,}01]$ alors on accepte l'hypothèse nulle
   sinon on rejette l'hypothèse nulle, avec un risque d'erreur de 5 %.
3. a. La longueur moyenne des vis de cet échantillon est
   $\overline{l} = \dfrac{48 \times 2{,}98 + 92 \times 2{,}99 + 240 \times 3 + 18 \times 3{,}01 + 2 \times 3{,}02}{400} = 2{,}99585$.
   b. $\overline{l} \in [2{,}99\,;\,3{,}01]$ donc on accepte l'hypothèse nulle.