Corrigé du Brevet de technicien supérieur Opticien–lunetier 13 mai 2014

Exercice 1 **10 points**

A. Modèle discret du premier traitement : étude de suites

1. A l'instant $t = 0$ on injecte 1,8 unités du médicament donc $u_0 = 1,8$.
Ensuite à chaque heure la quantité de médicament diminue de 30 %, ce qui se traduit par une multiplication par le coefficient 0,7, et on réinjecte une quantité de 1,8 unités de médicament.
Par conséquent on a la relation $u_{n+1} = 0,7u_n + 1,8$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
on a $v_{n+1} = u_{n+1} - 6 = 0,7u_n + 1,8 - 6 = 0,7u_n - 4,2 = 0,7(u_n - 6) = 0,7v_n$
donc (v_n) est géométrique de raison 0,7.
Son premier terme est $v_0 = u_0 - 6 = 1,8 - 6 = -4,2$.
3. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $v_n = -4,2 \times 0,7^n$ et $u_n = -4,2 \times 0,7^n + 6$.
4. **a.** $0 < 0,6 < 1$ donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} 0,7^n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} u_n = 6$.
   b. A long terme la quantité de médicament dans le sang se rapproche de six unités, ce qui permet d'affirmer que le seuil de 5 unités sera dépassé.

B. Modèle continu du second traitement : résolution d'une équation différentielle

1. Les solutions de $y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $y = k\mathrm{e}^{-t}$ où $k \in \mathbb{R}$.
2. $g'(t) + g(t) = 5(-0,5)\mathrm{e}^{-0,5t} + 5\mathrm{e}^{-0,5t} = 2,5\mathrm{e}^{-0,5t}$
donc g est solution de l'équation $y' + y = 2,5\mathrm{e}^{-0,5t}$.
3. Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $y = k\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^{-0,5t}$.
4. La condition initiale $f(0) = 0$ s'écrit $k\mathrm{e}^0 + 5\mathrm{e}^0 = 0$ soit $k = -5$
et $f(x) = -5\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^{-0,5t}$.

C. Étude d'une fonction

La fonction f est définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $f(t) = -5\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^{-0,5t}$.

1. **a.** $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-t} = 0$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,5t}$ donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
   b. On en déduit que la courbe de f admet en $+\infty$ une asymptote (horizontale) d'équation $y = 0$ (l'axe des abscisses).
2. **a.** $f(t) = -5\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^{-0,5t}$ donc $f'(t) = -5(-1)\mathrm{e}^{-t} + 5(-0,5)\mathrm{e}^{-0,5t} = 5\mathrm{e}^{-t} - 2,5\mathrm{e}^{-0,5t}$. En mettant 2,5 et e^{-t} en facteur (on sait que $\mathrm{e}^{-0,5t} = \mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{0,5t}$), on obtient
$f'(t) = 2,5 \times 2\mathrm{e}^{-t} - 2,5\mathrm{e}^{-t}\mathrm{e}^{0,5t} = 2,5\mathrm{e}^{-t}\left(2 - \mathrm{e}^{0,5t}\right)$.
   b. Puisque $2,5\mathrm{e}^{-t} > 0$ (une exponentielle étant strictement positive), $f'(t)$ a le signe de $2 - \mathrm{e}^{0,5t}$.
$2 - \mathrm{e}^{0,5t} > 0 \iff -\mathrm{e}^{0,5t} > -2 \iff \mathrm{e}^{0,5t} < 2 \iff 0,5t < \ln(2) \iff t < 2\ln(2)$.
On en déduit le signe de $f'(t)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$, présenté dans le tableau de variations ci-dessous.
   c.

t	0		2ln2		$+\infty$
$f'(t)$		+	0	−	
f	0	↗	1,25	↘	0

3. De $f(0) = -5\mathrm{e}^0 + 5\mathrm{e}^0 = 0$ et $f'(0) = 5\mathrm{e}^0 - 2,5\mathrm{e}^0 = 2,5$ on déduit l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse zéro, $y = f'(0)(t-0) + f(0)$ soit $y = 2,5t$.

4. **a.** Vérifions la primitive $F(t) = 5\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{-0,5t}$ fournie par le logiciel.
$F'(t) = 5(-1)\mathrm{e}^{-t} - 10(-0,5)\mathrm{e}^{-0,5t} = -5\mathrm{e}^{-t} + 5\mathrm{e}^{-0,5t} = f(t)$
donc F est bien une primitive de f.

b. Avec cette primitive on trouve
$$\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = F(6) - F(0) = 5\mathrm{e}^{-6} - 10\mathrm{e}^{-0,5\times6} - \left(5\mathrm{e}^{-0} - 10\mathrm{e}^{-0,5\times0}\right)$$
donc $\int_0^6 f(t)\,\mathrm{d}t = 5 + 5\mathrm{e}^{-6} - 10\mathrm{e}^{-3} \approx 4,51$.

EXERCICE 2 **10 points**

A. évènements indépendants

1. La probabilité $p(A \cap B)$ est :

0,006	**0,000 6**	0,05

Les événements A et B sont indépendants donc $P(A\cap B) = P(A)P(B) = 0,03 \times 0,02 = 0,0006$.

2. La probabilité $p(A \cup B)$ est :

0,049 4	0,006	0,05

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B) = 0,03 + 0,02 - 0,0006 = 0,0494$.

3. La probabilité $p\left(\overline{A} \cap \overline{B}\right)$ est :

0,999 4	**0,950 6**	0,949 4

$P\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = 1 - P(A\cup B) = 1 - 0,0494 = 0,9506$.

4. La probabilité que la lentille prélevée présente un seul des deux défauts est :

0,048 8	0,05	0,049 4

$P\left(A\cap\overline{B}\right) + P\left(\overline{A}\cap B\right) = P(A\cap B) - P(A\cup B) = 0,0494 - 0,0006 = 0,0488$.

B. Loi binomiale, loi de Poisson

1. **a.** On répète $n = 120$ fois, indépendamment (tirage assimilé à un tirage avec remise), une épreuve à deux issues : le succès « la lentille prélevée n'est pas conforme aux normes de commercialisation », de probabilité $p = 0,05$, et l'échec.
La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 120$ et $p = 0,05$.

b. La probabilité qu'au moins une lentille de ce prélèvement ne soit pas conforme aux normes de commercialisation est
$P(X \geqslant 1) = 1 - P(X = 0) \approx 0,002$.

2. **a.** On approche la loi de X par une loi de Poisson de même espérance
$\lambda = np = 120 \times 0,05 = 6$.

b. Si Y suit la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 6$,
alors $P(Y \leqslant 5) \approx 0,446$.

c. Alors la probabilité qu'il y ait dans un prélèvement au moins six lentilles non conformes aux normes de commercialisation
est $P(Y \geqslant 6) = 1 - P(Y \leqslant 5) \approx 1 - 0,446 = 0,554$.

C. Loi normale

On sait que Z suit la loi normale de moyenne 1 et d'écart type $0,08$.
La probabilité qu'une lentille souple soit conforme pour la densité
est $P(0,88 \leqslant Z \leqslant 1,12) \approx 0,866$.

D. Intervalle de confiance

1. Un intervalle de confiance centré sur $\overline{d}$ pour la moyenne au niveau de confiance 95 % est $I = \left[\overline{d} - 1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{150}} ; \overline{d} + 1,96\dfrac{\sigma}{\sqrt{150}}\right]$ (avec $\overline{d} = 1,108$ et $\sigma = 0,07$) soit $I \approx [1,09 ; 1,12]$.
2. On ne peut être certain que la moyenne μ appartient à l'intervalle de confiance obtenu. On sait seulement que pour la plupart (95 %) des échantillons, l'IC contiendra μ.