Corrigé du Brevet de technicien supérieur
Opticien–lunetier session 15 mai 2012

Exercice 1 **10 points**

A. Résolution d'équations différentielles

1. **a.** Les solutions de l'équation différentielle $x' + 2x = 0$ sont les fonctions de la forme $x(t) = k\mathrm{e}^{-2t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

   b. La condition initiale $f(0) = 5$ s'écrit $k\mathrm{e}^{-2\times 0} = 5$ soit $k = 5$,
   ainsi $f(t) = 5\mathrm{e}^{-2t}$.

2. **a.** Les solutions de $y' + y = 0$ sont les fonctions de la forme $y = k\mathrm{e}^{-t}$ où $k \in \mathbb{R}$.

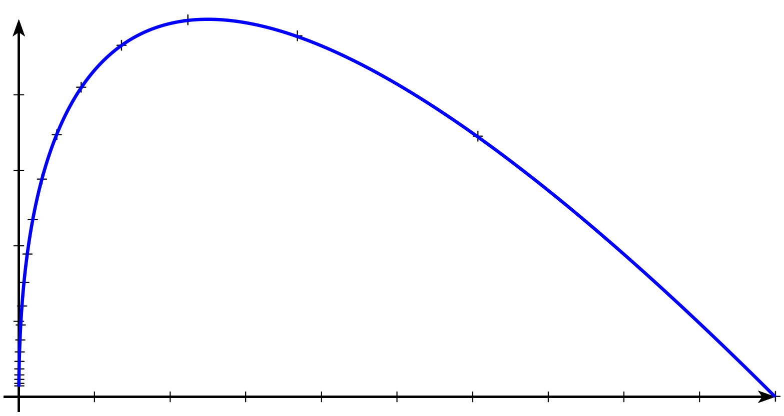
   b. De $h(t) = -10\mathrm{e}^{-2t}$ on tire $h'(t) = -10(-2)\mathrm{e}^{-2t} = 20\mathrm{e}^{-2t}$
   donc $h'(t) + h(t) = 20\mathrm{e}^{-2t} - 10\mathrm{e}^{-2t} = 10\mathrm{e}^{-2t}$
   donc h est une solution de l'équation différentielle (E_2).

   c. Les solutions de (E_2) sont les fonctions de la forme $y = k\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{-2t}$.

   d. La condition initiale $g(0) = 0$ donne $k\mathrm{e}^{0} - 10\mathrm{e}^{0} = 0$ donc $k = 10$
   et $g(t) = 10\mathrm{e}^{-t} - 10\mathrm{e}^{-2t}$.

B. Étude de fonctions et tracé d'une courbe

1. De $f(t) = 5\mathrm{e}^{-2t}$ on déduit que $f'(t) = -10\mathrm{e}^{-2t}$ or $\mathrm{e}^{-2t} > 0$ sur $[0~;~5]$ donc $f'(t) < 0$ sur cet intervalle.
   Avec $g(t) = 10\left(\mathrm{e}^{-t} - \mathrm{e}^{-2t}\right)$
   on a $g'(t) = 10\left(-\mathrm{e}^{-t} + 2\mathrm{e}^{-2t}\right) = 10\mathrm{e}^{-t}\left(-1 + 2\mathrm{e}^{-t}\right) = 10\mathrm{e}^{-t}\left(2\mathrm{e}^{-t} - 1\right)$.
   Puisque $10\mathrm{e}^{-t} > 0$, $g'(t)$ a le signe de $2\mathrm{e}^{-t} - 1$,
   or $2\mathrm{e}^{-t} - 1 > 0 \iff 2\mathrm{e}^{-t} > 1 \iff \mathrm{e}^{-t} > \frac{1}{2} \iff -t > \ln\left(\frac{1}{2}\right) \iff t < \ln(2)$
   ce qui permet d'établir que $g'(t) > 0$ sur $[0~;~\ln(2)[$ et $g'(t) < 0$ sur $]\ln(2)~;~5]$.



2.

3. Pour $t = 0$, la tangente a pour vecteur directeur $\vec{v}_0\begin{pmatrix} f'(0) \\ g'(0) \end{pmatrix}$ soit $\vec{v}_0\begin{pmatrix} -10 \\ 10 \end{pmatrix}$ et passe par $(f(0); g(0)) = (5;0)$, son coefficient directeur est $\frac{10}{-10} = -1$, son ordonnée à l'origine est $0 - (-1)5 = 5$, son équation réduite est $y = -x + 5$.
   Pour $t = 5$, la tangente a pour vecteur directeur $\vec{v}_5\begin{pmatrix} f'(5) \\ g'(5) \end{pmatrix}$ soit $\vec{v}_5\begin{pmatrix} -10\mathrm{e}^{-10} \\ 20\mathrm{e}^{-10} - 10\mathrm{e}^{-5} \end{pmatrix}$ et passe par $(f(0); g(0)) = (5\mathrm{e}^{-10}; 10\mathrm{e}^{-5} - 10\mathrm{e}^{-10})$, son coefficient directeur est $\frac{20\mathrm{e}^{-10} - 10\mathrm{e}^{-5}}{-10\mathrm{e}^{-10}} = -2 + \mathrm{e}^{5}$, son ordonnée à l'origine est $10\mathrm{e}^{-5} - 10\mathrm{e}^{-10} - \left(\mathrm{e}^{5} - 2\right) \times 5\mathrm{e}^{-10} = 5\mathrm{e}^{-5}$, son équation réduite est $y = \left(\mathrm{e}^{5} - 2\right)x + 5\mathrm{e}^{-5}$.

C. Calcul intégral

$$I = \int_0^5 \underbrace{-10\left(\mathrm{e}^{-2t} - \mathrm{e}^{-t}\right)}_{g(t)}\,\mathrm{d}t = \left[-10\left(\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2} - \frac{\mathrm{e}^{-t}}{-1}\right)\right]_0^5 = \left[\underbrace{5\mathrm{e}^{-2t} - 10\mathrm{e}^{-t}}_{G(t)}\right]_0^5$$

$I = G(5) - G(0) = \left(5\mathrm{e}^{-2\times 5} - 10\mathrm{e}^{-5}\right) - \left(5\mathrm{e}^{-2\times 0} - 10\mathrm{e}^{0}\right) = 5\mathrm{e}^{-10} - 10\mathrm{e}^{-5} + 5 \approx 4,93.$

Exercice 2 **10 points**

A. Défaut(s) des pièces du premier modèle

1. **a.** $P(L \cup E) = P(L) + P(E) - P(L \cap E) = 0,04 + 0,07 - 0,02 = 0,09$

0,11	0,98	**0,09**

b. $P(L \cap \overline{E}) + P(\overline{L} \cap E) = P(L \cup E) - P(L \cap E) = 0,09 - 0,02 = 0,07$

0,09	**0,07**	0,03

c. $P(L \cap E) = 0,02$, $P(L)P(E) = 0,04 \times 0,07 = 0,0028$ donc $P(L \cap E) \neq P(L)P(E)$ donc L et E ne sont pas indépendants.
$P(L \cap E) \neq 0$ donc K et E ne sont pas incompatibles.

Les évènements L et E sont indépendants.	Les évènements L et E sont incompatibles.	**Les évènements L et E ne sont ni indépendants ni incompatibles.**

d. $P_L(E) = \dfrac{P(L \cap E)}{P(L)} = \dfrac{0,02}{0,04} = 0,5$

0,07	**0,5**	$\dfrac{2}{7}$

2. **a.** On répète $n = 10$ fois, indépendamment (tirage assimilé à un tirage avec remise), une épreuve à deux issues : le succès « la pièce a un défaut de longueur", de probabilité $p = 0,04$, et l'échec.
La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit la loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0,04$.

b. La probabilité qu'un tel prélèvement comporte exactement trois pièces présentant le défaut de longueur est $P(X = 3) \approx 0,006$, arrondie à 10^{-3}.

B. Rayon des pièces du deuxième modèle

La variable aléatoire R suit la loi normale d'espérance 15 et d'écart type 0,75.

1. La probabilité que la pièce prélevée ait un rayon inférieur à 16 mm est
$P(R \leqslant 16) \approx 0,909$.

2. La probabilité que la pièce prélevée ait un rayon compris entre 13,5 et 16,5 mm est $P(13,5 \leqslant R \leqslant 16,5) \approx 0,954$.

C. Masses des pièces du troisième modèle

1. Une estimation ponctuelle de l'écart type dans la production du 7 mars, à partir de l'écart type σ_e calculé sur un échantillon de taille $n = 100$, est
$\sigma = \sqrt{\frac{100}{99}}\sigma_e \approx 0,500$.

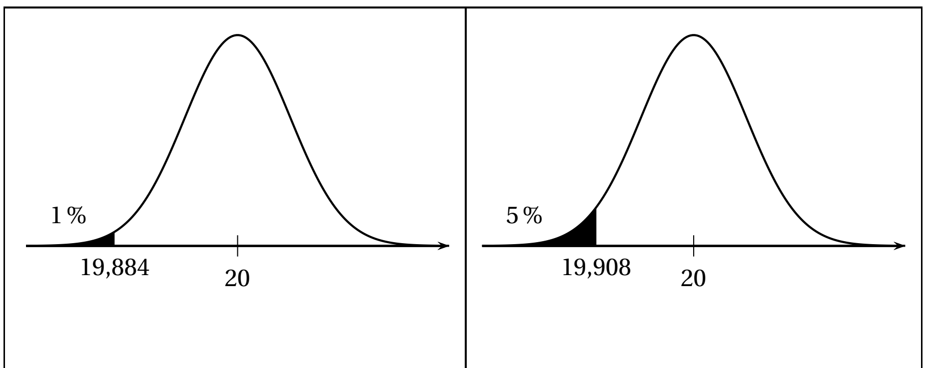
2. **a.** La variable aléatoire $\overline{Y}$ suit la loi normale d'espérance 20 et d'écart type 0,05. En utilisant la calculatrice (FracNormale ou InvN suivant le modèle), on trouve $P(\overline{Y} \geqslant 20 - h) = 0,95$ pour $h = 1,645 \times 0,05 \approx 0,082$.

b. On prélève 100 pièces du troisième modèle et on calcule la moyenne $\overline{x}$ des masses des pièces de cet échantillon en grammes.
Si $\overline{x} \geqslant 20 - h = 19,908$,
alors on accepte H_0,
sinon on rejette H_0 avec un risque d'erreur (de première espèce) 0,05.

c. $\overline{x} = 19,972 \geqslant 19,908$ donc on accepte H_0. On ne peut pas conclure que la masse moyenne des pièces du troisième modèle fabriquées le 7 mars 2012 est inférieure à 20 g.

3. En reprenant la même démarche, on a $h = 2,326 \times 0,05 \approx 0,116$, l'intervalle d'acceptation de l'hypothèse nulle est alors $[19,884 : +\infty[$, et puisque la moyenne $\overline{x}$ appartient à cet intervalle on accepte aussi l'hypothèse nulle au seuil de signification 1 %.

On peut aussi remarquer que la zone critique pour un seuil plus petit est incluse dans la zone critique pour un seuil plus grand.



Seuil 1 % intervalle $]-\infty ; 19,884]$	Seuil 5 % intervalle $]-\infty ; 19,908]$