

∞ Corrigé du BTS Métropole – 16 mai 2025 ∞

Groupement B1

Exercice 1

10 points

Pour fabriquer de l'aluminium en feuille on chauffe une plaque d'aluminium à 250 °C puis on la sort du four : c'est alors la phase de refroidissement. On étudie l'évolution de la température de la plaque d'aluminium durant cette phase.

On note $f(t)$ la température de la plaque d'aluminium à l'instant t .

$f(t)$ est exprimée en degré Celsius, et t désigne le nombre de minutes de refroidissement.

Partie A. Équation différentielle

On sait que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $y' + 0,25y = 7,5$

1. On résout l'équation différentielle (E_0) : $y' + 0,25y = 0$.

D'après le formulaire, l'équation différentielle $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions définies par $y(t) = k e^{-at}$, où $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle $y' + 0,25y = 0$ a pour solutions les fonctions définies par $y(t) = k e^{-0,25t}$, où $k \in \mathbb{R}$.

2. Soit la fonction constante g définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $g(t) = c$, où $c \in \mathbb{R}$.

g est solution de (E) si et seulement si, pour tout réel t , $g'(t) + 0,25g(t) = 7,5$, soit $0,25c = 7,5$; donc $c = \frac{7,5}{0,25} = 30$.

3. Donc les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $[0; +\infty[$ par $f(t) = k e^{-0,25t} + 30$.

4. $f(0) = 250 \iff k e^0 + 30 = 250 \iff k = 220$

La fonction f a donc pour expression $f(t) = 220 e^{-0,25t} + 30$ où $t \in [0; +\infty[$.

Partie B. Étude de fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ par : $f(t) = 220 e^{-0,25t} + 30$.

1. La valeur de la température de la plaque après un quart d'heure de refroidissement, est $f(15)$ dont la valeur approchée à 0,1 °C est 35,2 °C.

2. $\lim_{t \rightarrow +\infty} -0,25t = -\infty$ et $\lim_{T \rightarrow -\infty} e^T = 0$, donc $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-0,25t} = 0$.

On en déduit que $\lim_{t \rightarrow +\infty} 220 e^{-0,25t} + 30 = 30$, c'est-à-dire $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 30$.

La courbe représentative de la fonction f admettra donc une asymptote horizontale d'équation $y = 30$ en $+\infty$.

La température limite de refroidissement sera donc de 30 °C.

3. $f'(t) = 220 \times (-0,25) e^{-0,25t} + 0 = -55 e^{-0,25t}$

Pour tout réel x , on sait que $e^x > 0$, donc pour tout t de $[0; +\infty[$, $f'(t) < 0$.

La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0; +\infty[$. Cela paraît logique car plus le temps passe pendant la phase de refroidissement, plus la température de la plaque diminue.

4. Un technicien affirme : « en cent secondes, la plaque a perdu cent degrés ».

Cent secondes correspondent à 1 minute et 40 secondes, soit $1 + \frac{40}{60} \approx 1,667$.

Or $f(1,667) \approx 175 > 150$ donc le technicien a tort.

On résout l'inéquation $f(t) < 150$.

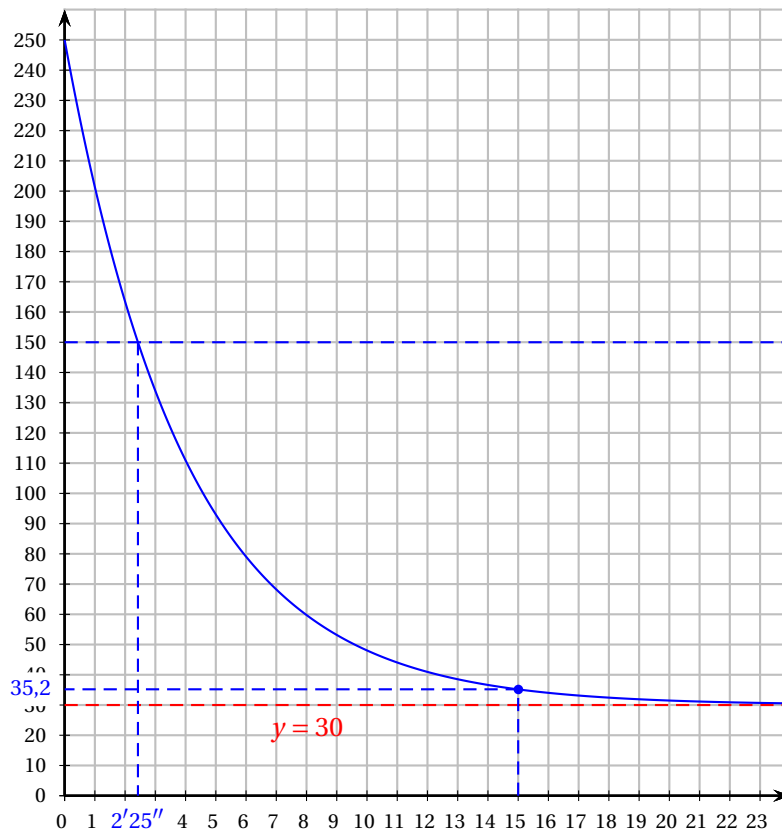
$$f(t) < 150 \iff 220e^{-0,25t} + 30 < 150 \iff 220e^{-0,25t} < 120 \iff e^{-0,25t} < \frac{120}{220}$$

$$\iff -0,25t < \ln\left(\frac{120}{220}\right) \iff t > -\frac{\ln\left(\frac{120}{220}\right)}{0,25}$$

Or $-\frac{\ln\left(\frac{120}{220}\right)}{0,25} \approx 2,4245$ et 0,4245 minute correspond à $0,4245 \times 60$ soit environ 25 secondes.

La durée nécessaire, arrondie à la seconde, pour que la température de la plaque passe en dessous de 150°C est donc de 2 minutes et 25 secondes.

5. On trace la courbe représentative de f dans un repère orthogonal.



Exercice 2**10 points****Partie A. Loi exponentielle**

On s'intéresse au temps que doit attendre un client pour être servi à la terrasse d'un café. On admet que ce temps d'attente, exprimé en minute, peut être modélisé par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre λ .

- On sait que le temps d'attente moyen d'un client est égal à 4 minutes.
Si la variable aléatoire T suit une loi exponentielle de paramètre λ , son espérance, c'est-à-dire le temps d'attente moyen d'un client, est égal à $E(T) = \frac{1}{\lambda}$.
Comme $E(T) = 4$, on a $\frac{1}{\lambda} = 4$ donc $\lambda = 0,25$.
- L'évènement $(T < 3)$ est l'évènement « le temps d'attente est inférieur à 3 minutes ».
Si T suit une loi exponentielle de paramètre λ , on a : $P(T < t) = 1 - e^{-\lambda t}$.
Donc $P(T < 3) = 1 - e^{-0,25 \times 3} \approx 0,528$.
- La probabilité qu'un client attende au moins 5 minutes est $P(T \geq 5)$.
Si T suit une loi exponentielle de paramètre λ , on a : $P(T \geq t) = e^{-\lambda t}$.
Donc $P(T \geq 5) = e^{-0,25 \times 5} \approx 0,287$.
- On cherche le temps t tel que : $P(T > t) = 0,1$.
On résout l'équation :
$$P(T > t) = 0,1 \iff e^{-0,25t} = 0,1 \iff -0,25t = \ln(0,1) \iff t = -\frac{\ln(0,1)}{0,25}$$

$$-\frac{\ln(0,1)}{0,25} \approx 9,21$$
 ; or $0,21 \times 60 \approx 13$ donc le temps t tel que $P(T > t) = 0,1$ est de 9 minutes 13 secondes.

Partie B. Probabilités conditionnelles

Un café propose des boissons chaudes et des boissons froides, qui peuvent être servies en terrasse ou en salle.

On dispose des informations suivantes :

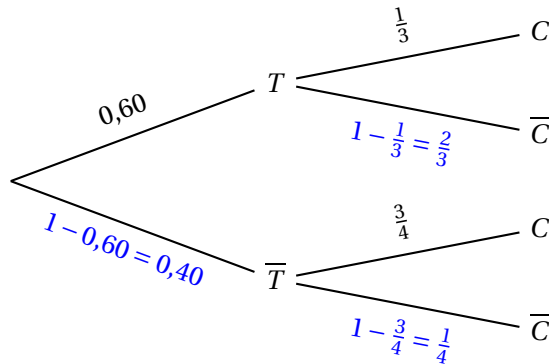
- 60 % des consommations sont servies en terrasse.
Dans un tiers des cas, il s'agit d'une boisson chaude.
- 40 % des consommations sont servies en salle.
Parmi elles, les trois quarts sont des boissons chaudes.

On s'intéresse à une consommation choisie au hasard.

On considère les évènements suivants :

- T : il s'agit d'une consommation servie en terrasse.
- C : il s'agit d'une boisson chaude.

1. On dresse un arbre pondéré représentant la situation.



2. $P(T \cap C) = P(T) \times P_T(C) = 0,60 \times \frac{1}{3} = 0,20$
3. La probabilité que la consommation soit une boisson chaude est $P(C)$.

D'après la formule des probabilités totales :

$$P(C) = P(T \cap C) + P(\bar{T} \cap C) = 0,20 + 0,40 \times \frac{3}{4} = 0,50 = \frac{1}{2}$$

4. Une boisson chaude vient d'être commandée. Un serveur déclare :
« Elle a davantage de chance d'être servie en salle qu'en terrasse ».

La probabilité qu'elle soit servie en terrasse est :

$$P_C(T) = \frac{P(T \cap C)}{P(C)} = \frac{0,20}{0,50} = 0,40 < \frac{1}{2}$$

Donc la boisson chaude a davantage de chance d'être servie en salle qu'en terrasse, et donc le serveur a raison.

5. $P(T \cap C) = 0,20$; $P(T) = 0,60$ et $P(C) = 0,50$ donc $P(T) \times P(C) = 0,30$
 $P(T \cap C) \neq P(T) \times P(C)$ donc les évènements T et C ne sont pas indépendants.

Partie C. Intervalle de confiance

La direction d'un café souhaite estimer la proportion p d'étudiants parmi ses clients. Pour cela, elle interroge un échantillon aléatoire de 1 000 clients. Dans cet échantillon, elle compte 525 étudiants.

1. $f = \frac{525}{1000} = 0,525$ est une estimation ponctuelle de la proportion p d'étudiants.
2. Pour donner une estimation de la proportion p , on détermine un intervalle de confiance I_{90} avec le niveau de confiance de 90 %.

$$\begin{aligned} I_{90} &= \left[f - 1,65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1,65\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right] \\ &= \left[0,525 - 1,65\sqrt{\frac{0,525(1-0,525)}{1000}} ; 0,525 + 1,65\sqrt{\frac{0,525(1-0,525)}{1000}} \right] \\ &\approx [0,499 ; 0,551] \end{aligned}$$

3. Le patron du café affirme : « La proportion p est obligatoirement contenue dans l'intervalle de confiance. »

Il a tort : il n'y a que 90 % de chances que l'intervalle I_{90} contienne la proportion p .

4. On estime que lorsqu'un étudiant vient au café, sa consommation s'élève en moyenne à 3,50 euros. Chaque mois, le café reçoit 5 000 clients. La direction du café décide d'accorder une réduction de 10 % aux étudiants.

En supposant que la proportion p est effectivement contenue dans l'intervalle de confiance, pour 5 000 clients, on peut estimer le nombre d'étudiants entre $0,499 \times 5\,000$ et $0,551 \times 5\,000$, soit dans l'intervalle $[2\,495 ; 2\,755]$.

La réduction pour un étudiant est de 10 % de 3,50 €, soit 0,35 €.

$$2\,495 \times 0,35 = 873,25 \text{ et } 2\,755 \times 0,35 = 964,25$$

On peut donc estimer que le manque à gagner mensuel en euro pour le café appartient à l'intervalle $[873,25 ; 964,25]$.