Brevet de technicien supérieur 12 mai 2016
Groupement C

Les deux exercices sont indépendants

Exercice 1 **10 points**

Partie 1

1. Dans les trois cas il y a respect de la température initiale.
   Au cours des trois premières secondes il ne faut pas perdre plus de 20 % de la température initiale, soit

$$0,20 \times 240 = 48\ (°\text{C})$$

   240 - 48 = 192. Or la droite d'équation $y = 192$ coupe la courbe de T_3 en un point d'abscisse supérieure à 3, donc elle ne satisfait aux conditions souhaitées.
2. Pour les deux courbes restantes c'est T_2 qui atteint le plus rapidement la température de 100 °C : elle permettre donc de fabriquer plus rapidement une hélice.

Partie 2

1. On sait que la solution générale de l'équation est :

$$y = C\mathrm{e}^{-0,1t}, \quad C \in \mathbb{R}\,\text{quelconque}).$$

2. $g(t) = a$, donc $g'(t) = 0$. g est solution de (E) si et seulement si :
   $0 + 0,1a = 8 \iff a = 80$. $g(t) = 80$ est une solution particulière de (E).
3. Les solutions de (E) sont donc de la forme :

$$y = 80 + C\mathrm{e}^{-0,1t}, \quad C \in \mathbb{R}\,\text{quelconque}).$$

4. La fonction f solution de (E) et vérifiant les conditions de température est telle que :
   $f(0) = 240 \iff 80 + C\mathrm{e}^{-0,1\times 0} = 240 \iff 80 + C = 240 \iff C = 160$.
   On a donc pour $t \in [0\,;\,+\infty[$, $f(t) = 80 + 160\mathrm{e}^{-0,1t}$.
   Remarque : on peut vérifier que $f(3) = 80 + 160\mathrm{e}^{-0,3} \approx 198,5$ °C. La température est donc supérieure à 192 comme exigé dans la partie 1.

Comme quel que soit $t \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1t} = 0$, on a

Partie 3

1. **a.** On voit que f est la fonction trouvée à la question 4. de la partie précédente, puisque $f(t) = 80 + 80 \times 2\mathrm{e}^{-0,1t} = 80 + 160\mathrm{e}^{-0,1t}$.
   On a donc $f'(t) = 0,1y = 0 \iff f'(t) = -0,1y = -0,1 \times 80\left(1 + 2\mathrm{e}^{-0,1t}\right)$.
   Or on sait que quel que soit le réel t, $\mathrm{e}^{-0,1t} > 0$, donc $0,1\times 80\left(1 + 2\mathrm{e}^{-0,1t}\right) > 0$ et enfin $f'(t) < 0$: la fonction f est strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$
   b. On sait que $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0,1t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} f(t) = 80$.
   c. Les résultats précédents vérifient que la température est décroissante et qu'à long terme la température va se stabiliser à 80 °C.

2. **a.** On a $f(t) = 100 \iff 80\left(1+2\text{e}^{-0,1t}\right) = 100 \iff 1+2\text{e}^{-0,1t} = \dfrac{100}{80} = 1,25 \iff$ $2\text{e}^{-0,1t} = 0,25 \iff \text{e}^{-0,1t} = 0,125 \iff -0,1t = \ln 0,125 \iff t = \dfrac{\ln 0,125}{-0,1} \approx$ $20,79$, soit 20,8 secondes à 0,1 près par excès.

   b. La température de l'hélice sera descendue à 100 °C après 20,8 secondes environ.

3. **a.** On a $\dfrac{1}{3-0}\displaystyle\int_0^3 f(t)\,\text{d}t = \dfrac{1}{3}\left(80t - 1600\text{e}^{-0,1t}\right) = \dfrac{1}{3}\left(80\times 3 - 1600\text{e}^{-0,3} - 0 + 1600\text{e}^{0}\right) =$ $\dfrac{1600+240-1600\text{e}^{-0,3}}{3} = \dfrac{1840-1600\text{e}^{-0,3}}{3}$.

   b. La valeur moyenne est à peu près égale à 218,2 °C. La fonction f satisfait donc à l'exigence de la température moyenne de plus de 210 °C.

Exercice 2 **10 points**

Partie 1

Une calculatrice fournit $P(X \geqslant 10,5) \approx 0,97$.

Partie 2

1. D'après la loi des probabilités totales, la probabilité d'être conforme est : $0,6\times 0,97 + 0,4\times 0,95 = 0,962$.

   La probabilité de ne pas être conforme est donc : $1 - 0,962 = 0,038$.

2. **a.** On a une expérience de Bernoulli de paramètre $n = 60$, avec une chance de succès (avoir une batterie non conforme) de probabilité $p = 0,038$.

   b. La calculatrice donne $P(Y = 2) \approx 0,2702$ soit 0,27 au centième.

   c. De même la probabilité qu'il y ait plus de quatre batteries non conformes est :

   $P(Y \geqslant 5) \approx 0,078$.

   d. L'espérance de la variable Y est donnée par la formule :

   $E(Y) = n\times p = 60\times 0,038 = 2,28$.

   Ceci signifie que sur un lot de 60 batteries un peu plus de 2 seront non conformes (ou sur 600, 23 seront non non conformes).

Partie 3

1. L'hypothèse nulle est H_0 : « $m \geqslant 11,5$ ».
2. Par lecture du tableau $a \approx 11,412$.
3. Le résultat précédent ne valide pas l'hypothèse nulle, c'est-à-dire que l'autonomie n'a pas baissé de 5 %. On ne peut pourtant pas dire que cette autonomie a baissé.
4. L'intervalle de confiance au seuil de 5 % est : $\left[11,4 - \frac{1,96\sigma}{10}\ ;\ 11,4 + \frac{1,96\sigma}{10}\right] \approx [11,389\ ;\ 11,411]$.

   Comme 11,5 n'appartient pas à cet intervalle, on peut donc dire que l'autonomie a baissé au risque d'erreur de 5 %.
5. L'intervalle de confiance au seuil de 1 % est : $\left[11,4 - \frac{2,58\sigma}{10}\ ;\ 11,4 + \frac{2,58\sigma}{10}\right] \approx [11,386\ ;\ 11,414]$.

   Comme 11,5 n'appartient toujours pas à cet intervalle, on peut donc dire que l'autonomie a baissé au risque d'erreur de 1 %.