Brevet de technicien supérieur session 2013
Conception de produits industriels

Le sujet comporte 3 exercices indépendants qui seront traités sur des copies séparées

Exercice 1 **3 points**

1. On a $x_G = \dfrac{-2+3+0}{3} = \dfrac{1}{3}$ $\quad y_G = \dfrac{4+5+3}{3} = \dfrac{12}{3} = 4$ $\quad z_G = \dfrac{1-1+4}{3} = \dfrac{4}{3}$.
2. Si ABC est rectangle en A, alors $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$.

   Or $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\2\\-4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}a-1\\-1\\0\end{pmatrix}$

   $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 0 \iff -1(a-1)-2+0 = 0 \iff -a+1-2 = 0 \iff a = -1$.
3. $AB = \begin{pmatrix}2-3 & 4+9\\-4-a & -8+3a\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1 & 13\\-4-a & -8+3a\end{pmatrix}$ d'où par identification :

   $\begin{cases}-9 &= -4-a\\7 &= -8+3a\end{cases} \iff \begin{cases}a &= 5\\15 &= 3a\end{cases}$ Les deux équations ont pour solution $a = 5$.
4. On a $A \times B = \begin{pmatrix}4a-b & -2a+b & -a+b & a+b\end{pmatrix}$. En identifiant à C, on obtient le système :

   $\begin{cases}4a-b &= 2\\-2a+b &= 0\\-a+b &= 1\\a+b &= c\end{cases}$

   En ajoutant les deux premières équations on obtient $2a = 2 \iff a = 1$ et donc $b = 4a-2 = 4-2 = 2$.

   La dernière donne donc $c = a+b = 1+2 = 3$.

Exercice 2 **7 points**

Partie A

1. L'équation (E_0) est une équation différentielle du second ordre. Son équation caractéristique est :

   $r^2+4r+5 = 0$ de discriminant $\Delta = 4^2-4\times5 = 16-20 = -4 = (2\text{i})^2$.

   Les solutions sont $-2+\text{i}$ et $-2-\text{i}$.

   On sait les solutions de l'équation (E_0) sont de la forme

   $$(\lambda\cos x+\mu\sin x)\text{e}^{-2x}.$$

   avec λ et μ réels quelconques.
2. Avec $g(x) = ax+b$, alors $g'(x) = a$ et $g''(x) = 0$.

   g solution de $(E) \iff 0+4a+5(ax+b) = 10x+3 \iff 5ax+4a+5b = 10x+3 \iff \begin{cases}5a &= 10\\4a+5b &= 3\end{cases} \iff \begin{cases}a &= 2\\4\times2+5b &= 3\end{cases} \iff \begin{cases}a &= 2\\5b &= -5\end{cases} \iff \begin{cases}a &= 2\\b &= -1\end{cases}$

   Conclusion : la fonction affine g définie par $g(x) = 2x-1$ est solution de (E).

3. On sait qu'alors les solutions de (E) sont la somme d'une solution de l'équation (E_0) et d'une solution particulière de l'équation avec second membre. Les solutions sont donc de la forme :

$$y = (\lambda\cos x + \mu\sin x)\mathrm{e}^{-2x} + 2x - 1.$$

4. On a $y'(x) = (-\lambda\sin x + \mu\cos x)\mathrm{e}^{-2x} - 2\mathrm{e}^{-2x}(\lambda\cos x + \mu\sin x) =$
$\mathrm{e}^{-2x}[(-\lambda - 2\mu)\sin x + (\mu - 2\lambda)\cos x]$, puis
$y''(x) = -2\mathrm{e}^{-2x}[(-\lambda - 2\mu)\sin x +$
$(\mu - 2\lambda)\cos x] + \mathrm{e}^{-2x}[(-\lambda - 2\mu)\cos x - (\mu - 2\lambda))\sin x] =$
$\mathrm{e}^{-2x}[(2\lambda + 4\mu - \mu + 2\lambda)\sin x + (-2\mu + 4\lambda - \lambda - 2\mu)\cos x] =$
$\mathrm{e}^{-2x}[4\lambda + 3\mu)\sin x + (3\lambda - 4\mu)\cos x]$.
La solution particulière y vérifiant $y(0) = -1$ et $y'(0) = -4$ est telle que
$\left\{\begin{array}{lcl}\lambda - 1 & = & -1\\ 3\lambda - 4\mu & = & -4\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl}\lambda & = & 0\\ \mu & = & 1\end{array}\right.$
La solution est donc définie par $y = f(x) = 2\mathrm{e}^{-2x}\sin x + 2x - 1$.

Partie B

Rem. : la fonction étudiée est la fonction trouvée à la fin de la **Partie A**.

1. a. On sait que le D. L. à l'ordre 2 de la fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^t$ est :

$$\mathrm{e}^t = 1\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + t^2\epsilon(t) \text{ avec } \lim_{t\to 0}\epsilon(t) = 0.$$

Donc avec $t = -2x$, on obtient :
$\mathrm{e}^{-2x} = 1 + \dfrac{-2x}{1!} + \dfrac{(-2x)^2}{2!} + (-2x)^2\epsilon(t)$ avec $\lim_{-2x\to 0}\epsilon(-2x) = 0$, soit :
$\mathrm{e}^{-2x} = 1 + \dfrac{-2x}{1!} + \dfrac{4x^2}{2!} + 4x^2\epsilon(x)$ avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$ et enfin :
$\mathrm{e}^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + x^2\epsilon(x)$avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

b. On sait qu'à l'ordre 2, $\sin x = x + x^2\epsilon(t)$avec $\lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$.

c. On a donc :
$\mathrm{e}^{-2x} = 1 - 2x + 2x^2 + x^2\epsilon_1(x)$avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_1(x) = 0$ et
$\sin x = x + x^2\epsilon_2(t)$avec $\lim_{x\to 0}\epsilon_2(x) = 0$. D'où par produit des parties régulières :
$\mathrm{e}^{-2x}\sin x = x\left(1 - 2x + 2x^2\right) + x^2\lim_{x\to 0}\epsilon_3(x) = 0$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon_3(x) = 0$ ou encore
$\mathrm{e}^{-2x}\sin x = x - 2x^2 + x^2\lim_{x\to 0}\epsilon_3(x) = 0$.

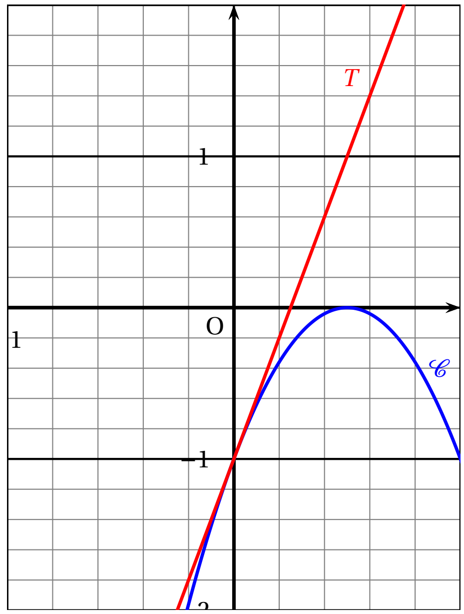
d. En multipliant par 2 le D. L. précédent et en ajoutant $2x - 1$, on obtient le D. L. de $f(x)$ à l'ordre 2 :

$$f(x) = -1 + 4x - 4x^2 + x^2\lim_{x\to 0}\epsilon_3(x) = 0 \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon_3(x) = 0.$$

2. a. On sait que la partie affine du D. L. précédent est l'équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ à l'origine, donc $\mathscr{C}$ a pour tangente à l'origine la droite T d'équation :

$$y = -1 + 4x.$$

b. Le dernier terme du D. L. de $f(x)$ en 0 donne la position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à la tangente en O. Comme ce nombre est négatif car $x^2 \geqslant 0 \Rightarrow -4x^2 \leqslant 0$, ceci signifie que la courbe $\mathscr{C}$ est au dessous de la tangente au voisinage de l'origine. Voir la figure ci-dessous.



Exercice 3 **10 points**

Partie A

1. Voir la figure à la fin.
2. On a les propriété des courbes de Bézier suivantes :
   — La courbe $\mathscr{C}_8$ contient le premier point $P_0 = O$ (origine) ;
   — La courbe $\mathscr{C}_8$ a pour vecteur directeur de la tangente en O le vecteur $\overrightarrow{P_0P_1}$;
   — La courbe $\mathscr{C}_8$ contient le troisième point P_2 ;
   — La courbe $\mathscr{C}_8$ a pour vecteur directeur de la tangente en P_2 le vecteur $\overrightarrow{P_1P_2}$
3. Construction du point $M(1/2)$:
   Avec $t = \frac{1}{2}$, on a $B_{(0,2)}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$;
   $B_{(1,2)}\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$;
   $B_{(2,2)}\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$.
   On a donc $\overrightarrow{OM}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}\overrightarrow{OP_0} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP_2}$.
   • Méthode barycentrique : Comme P_0 et P_2 sont pondérés par le même coefficient $\frac{1}{4}$, on commence par le barycentre de ces deux points qui est le milieu I de P_0P_2, soit le point de coordonnées $I\left(\frac{3}{2}\ ;\ 0\right)$.
   Ce point I est pondéré par le coefficient $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.
   Il reste donc à construire le barycentre des points I et P_1 affectés du même coefficient $\frac{1}{2}$. Donc le point $M(1/2)$ est le milieu de $[IP_1]$.
   On a donc $M(1/2)\left(\frac{\frac{3}{2}+1}{2}\ ;\ \frac{0+8}{0}\right) = \left(\frac{5}{4}\ ;\ 4)\right)$
   • Méthode vectorielle :
   Comme $\overrightarrow{OP_0} = \overrightarrow{0}$, la définition ci-dessus se simplifie :
   $\overrightarrow{OM}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{OP_1} + \frac{1}{4}\overrightarrow{OP_2}$.
   Comme $\overrightarrow{OP_1}\begin{pmatrix}1\\8\end{pmatrix}$, $\frac{1}{2}\overrightarrow{OP_1}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\4\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{OP_2}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, $\frac{1}{4}\overrightarrow{OP_2}\begin{pmatrix}\frac{3}{4}\\0\end{pmatrix}$, donc $\overrightarrow{OP_0}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\\4\end{pmatrix}$.
   Finalement $\overrightarrow{OM}\left(\frac{1}{2}\right)\begin{pmatrix}\frac{5}{4}\\4\end{pmatrix}$.

4. Voir à la fin.

On sait aussi que la courbe $\mathscr{C}$ a une tangente en $M(1/2)$ de vecteur directeur $\overrightarrow{P_0P_2} = \overrightarrow{OP_2}$. Donc cette tangente au point $M(1/2)$ est horizontale.

5. Avec $m = 1,5$. Le point P_1 a pour coordonnées $(1\,;\,1,5)$. Le principe est le même donc $M(1/2)$ est le milieu de $[IP_1]$ et a donc pour coordonnées $(1,25\,;\,0,75)$.

6. Voir la construction à la fin.

Partie B Travail numérique

1. Voir le graphique.

Vu la position de A entre les deux courbes, on peut conjecturer que $1,5 < m < 8$.

2. On sait que $\overrightarrow{OM}(t) = B_{(0,2)}(t)\overrightarrow{OP_0} + B_{(1,2)}(t)\overrightarrow{OP_1} + B_{(2,2)}(t)\overrightarrow{OP_2}$.

Avec $\overrightarrow{OM}(t)\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_0}\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{OP_2}\begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$, on obtient

$\overrightarrow{OM}(t)\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2t(1-t)+3t^2\\2t(1-t)\times m\end{pmatrix}$, d'où

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & 2t+t^2\\ y(t) & = & m\times 2t(1-t)\end{array}\right.$$

3. Il faut donc trouver t tel que $M(t)$ soit en A soit :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & 2t+t^2\\ 2 & = & m\times 2t(1-t)\end{array}\right.$$

4. La première équation s'écrit : $t^2+2t-1=0$ avec $t\in[0\,;\,1]$.

Avec $\Delta = 2^2-4\times1\times(-1) = 4+4 = 4\times2 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$, on sait qu'il y a deux solutions :

$t_1 = \dfrac{-2+2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}-1$ et $t_2 = \dfrac{-2-2\sqrt{2}}{2} = -\sqrt{2}-1$.

Or $-\sqrt{2}-1 \notin [0\,;\,1]$.

Il n'y a donc que la solution $t_1 = \sqrt{2}-1 \approx 0,414$.

5. En reportant cette valeur de t dans la deuxième équation, on obtient :

$2m\left(\sqrt{2}-1\right)\left[1-\left(\sqrt{2}-1\right)\right] = 2 \iff 2m\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2-\sqrt{2}\right) = 2 \iff m\left(\sqrt{2}-1\right)\left(2-\sqrt{2}\right) = 1 \iff m\left(3\sqrt{2}-4\right) = 1 \iff m = \dfrac{1}{3\sqrt{2}-4} = \dfrac{3\sqrt{2}+4}{\left(3\sqrt{2}-4\right)\left(3\sqrt{2}+4\right)} = \dfrac{3\sqrt{2}+4}{18-16} = \dfrac{3\sqrt{2}+4}{2} = m = \dfrac{3}{2}\sqrt{2}+2 \approx 4,1213$ soit 4,121 à 10^{-3} près.

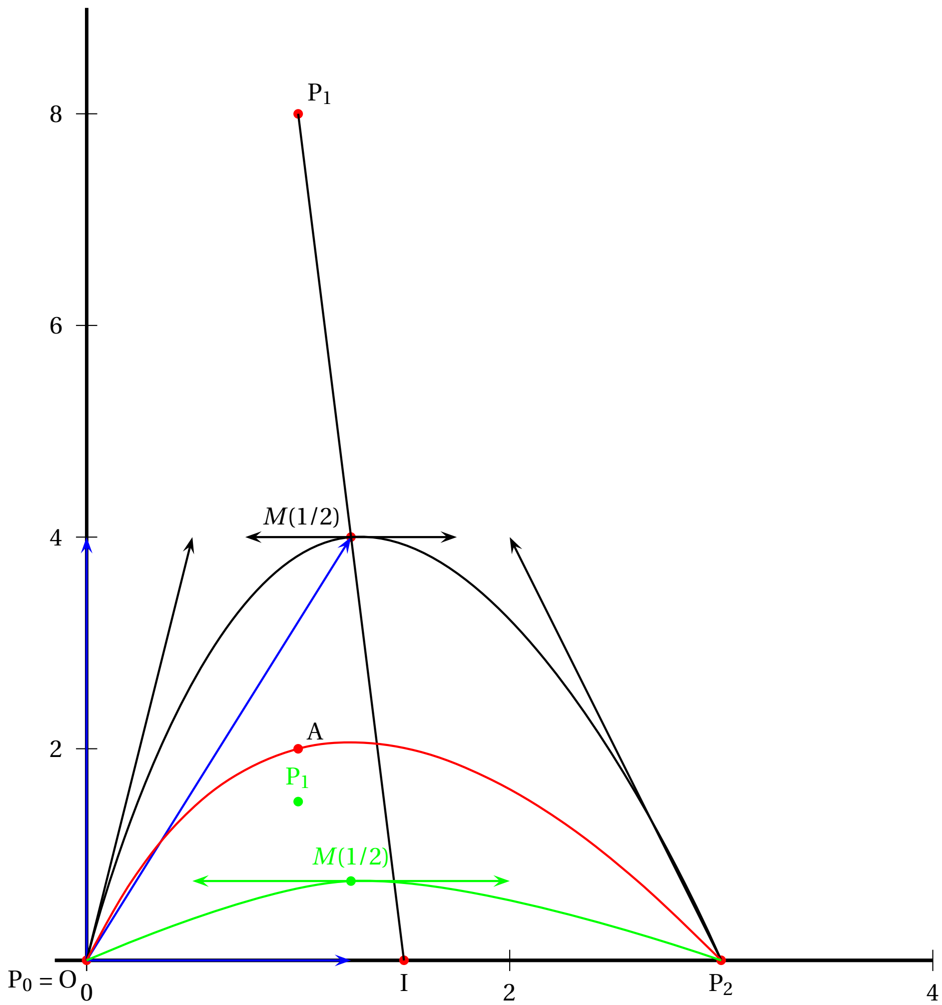
6. La courbe $\mathscr{C}_{\frac{3}{2}\sqrt{2}+2}$ passe donc par le point A(1 ; 2).

Partie C

1. Voir le tableau à la fin

2. Voir le tracé de $\mathscr{C}_{\frac{3}{2}\sqrt{2}+2}$ en rouge ci-dessous.

Exercice 3 : partie A



Exercice 3 : partie C

t	0	0,1	0,2	0,3	0,414	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1
$x(t)$	0	0,21	0,44	0,69	1	1,25	1,56	1,89	2,24	2,61	3
$y(t)$	0	0,74	1,32	1,73	2	2,06	1,98	1,73	1,32	0,74	0