Corrigé du brevet de technicien supérieur 13 mai 2014 Conception de produits industriels

Le sujet comporte 3 exercices indépendants qui seront traités sur des copies séparées

Exercice 1 **3 points**

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples.

1. Le produit d'une matrice 2×3 par une matrice 3×2 est une matrice 2×2. Réponse A
2. On a $\overrightarrow{\text{AB}}\,(-2~;~1~;~-1)$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\,(1~;~1~;~-2)$. Le vecteur $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}$ a pour coordonnées $(-1~;~-5~;~-3)$.
   Ce vecteur étant orthogonal par définition aux vecteurs $\overrightarrow{\text{AB}}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}$ est normal au plan (ABC)Si le vecteur $\overrightarrow{n}$ est normal au plan (ABC) lui aussi il doit être colinéaire au vecteur $\overrightarrow{u}$; on a un coefficient de colinéarité évident : -1. Donc $a = 5$ et $b = 3$. Réponse C.
3. On a $\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}} = \|\overrightarrow{\text{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\text{AB}}\| \times \cos\widehat{\text{BAC}}$, soit $\cos\widehat{\text{BAC}} = \dfrac{\overrightarrow{\text{AB}} \cdot \overrightarrow{\text{AC}}}{\|\overrightarrow{\text{AB}}\| \times \|\overrightarrow{\text{AB}}\|} = \dfrac{12 \times 3}{12 \times 6} = \dfrac{1}{2}$.
   Donc une mesure de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$ est $\dfrac{\pi}{3}$. Réponse C.

Exercice 2 **7 points**

Partie A

1. Les solutions de l'équation sont les fonctions définies sur $[0~;~+\infty[$ qui s'écrivent :
$$f(t) = K\text{e}^{-3t},\ \text{avec}\ K \in \mathbb{R}.$$
2. Soit la fonction constante définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(t) = K$; on a donc $f'(t) = 0$.
   f est solution de (E) signifie : $0 + 3K = 51$ soit $K = 17$.
3. Les solutions de (E) s'écrivent comme somme des solutions (E_0) et de la solution particulière 17 de (E), soit :
$$f(t) = 17 + K\text{e}^{-3t},\ \text{avec}\ K \in \mathbb{R}.$$
4. La solution f vérifiant $f(0) = 220$ est telle que $17 + K = 220$ soit $K = 203$.
   La solution est donc définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(t) = 17 + 203\text{e}^{-3t}$.

Partie B

1. **a.** On sait que $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} \text{e}^{-3t} = 0$, donc $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} 203\text{e}^{-3t} = 0$ et enfin $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} f(t) = 17$.
   b. Le résultat précédent montre que la droite dont une équation est $y = 17$ est asymptote horizontale à C au voisinage de plus l'infini.

2. La fonction f est celle qui a été trouvée à la fin de la partie A : elle est solution de l'équation différentielle (E), donc $f'(t)+3f(t) = 51$ soit $f'(t) = 51-3f(t) = 51-3\left(17+203\mathrm{e}^{-3t}\right) = -609\mathrm{e}^{-3t}$.

   Cette dérivée est négative pour tout réel, donc la fonction f est décroissante sur $[0~;~+\infty[$

   On a vu que $f(0) = 220$, donc f décroît de 220 à 17.

3. On a $f(0,5) = 17+203\mathrm{e}^{-3\times 0,5} = 17+203\mathrm{e}^{-1,5} \approx 62,29$ soit 62,3 au dixième près mais supérieure à 40.

4. Il suffit de résoudre l'inéquation suivante :

   $f(t) \leqslant 38 \iff 17+203\mathrm{e}^{-3t} \leqslant 38 \iff 203\mathrm{e}^{-3t} \leqslant 21 \iff \mathrm{e}^{-3t} \leqslant \dfrac{21}{203} \iff -3t \leqslant \ln\left(\dfrac{21}{203}\right) \iff t \geqslant -\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{21}{203}\right)$.

   La calculatrice donne $-\dfrac{1}{3}\ln\left(\dfrac{21}{203}\right) \approx 0,756$.

   0,756 h correspond à $0,756 \times 60 = 45,36$ min.

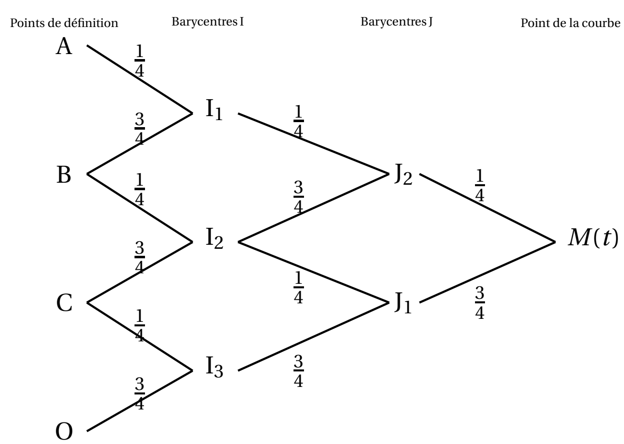
   La pièce pourra être tenue en main à partir de la 46^e minute.

Exercice 3 **10 points**

Partie A

1. Voir l'annexe. Par propriétés d'une courbe de Bézier, la tangente au point A est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ et la tangente au point O est colinéaire au vecteur $\overrightarrow{\text{CO}}$. (Tracées en pointillés).

2. L'algorithme de construction par barycentres successifs (appelé algorithme de De Casteljau) permet de construire le point $M(t)$ de la courbe de Bézier. Le schéma de principe est le suivant :



3. Voir l'annexe.

Partie B

1. Le point E est le symétrique du point C par rapport à l'origine du repère. D'où $\mathrm{C}(-4~;~-5)$ et $\mathrm{E}(4~;~5)$. Voir plus bas.

2. D'après la formule des polynômes de Bernstein :

   $B_{2,\,3}(t) = \dfrac{3!}{2!(3-2)!}t^2(1-t)^1 = 3t^2(1-t) = 3t^2-3t^3$.

3. En utilisant la définition vectorielle on a :
$\overrightarrow{\text{O}M_2(t)} = B_{1,\,3}(t)\overrightarrow{\text{OE}} + B_{2,\,3}(t)\overrightarrow{\text{OA}} + B_{3,\,3}(t)\overrightarrow{\text{OF}}$; on en tire :
$x = f(t) = 4B_{1,\,3}(t) - 5B_{2,\,3}(t) + 2B_{3,\,3}(t) =$
$4\left(3t^3 - 6t^2 + 3t\right) - 5\left(3t^2 - 3t^3\right) + 2t^3 = 29t^3 - 39t^2 + 12t.$
4. Étude de $f(t)$
   a. Sur $[0\,;\,1]$, f est dérivable et sur cet intervalle :
   $f'(t) = 87t^2 - 78t + 12 = 3\left(29t^2 - 26t + 4\right)$
   b. $f'(t) = 0 \iff 29t^2 - 26t + 4 = 0$
   $\Delta = 26^2 - 4 \times 4 \times 29 = 676 - 464 = 212 = 4 \times 53.$
   L'équation a deux solutions $t_2 = \dfrac{26 + 2\sqrt{53}}{58} \approx 0,699$ soit 0,70 au centième près et $t_1 = \dfrac{26 - 2\sqrt{53}}{58} \approx 0,197$ soit 0,20 au centième près.
   c. On calcule $f(0,2) \approx 1,07$ et $f(0,7) \approx -0,76$. Les variations de g étant donnés on peut dresser le tableau conjoint des variations de f et g :

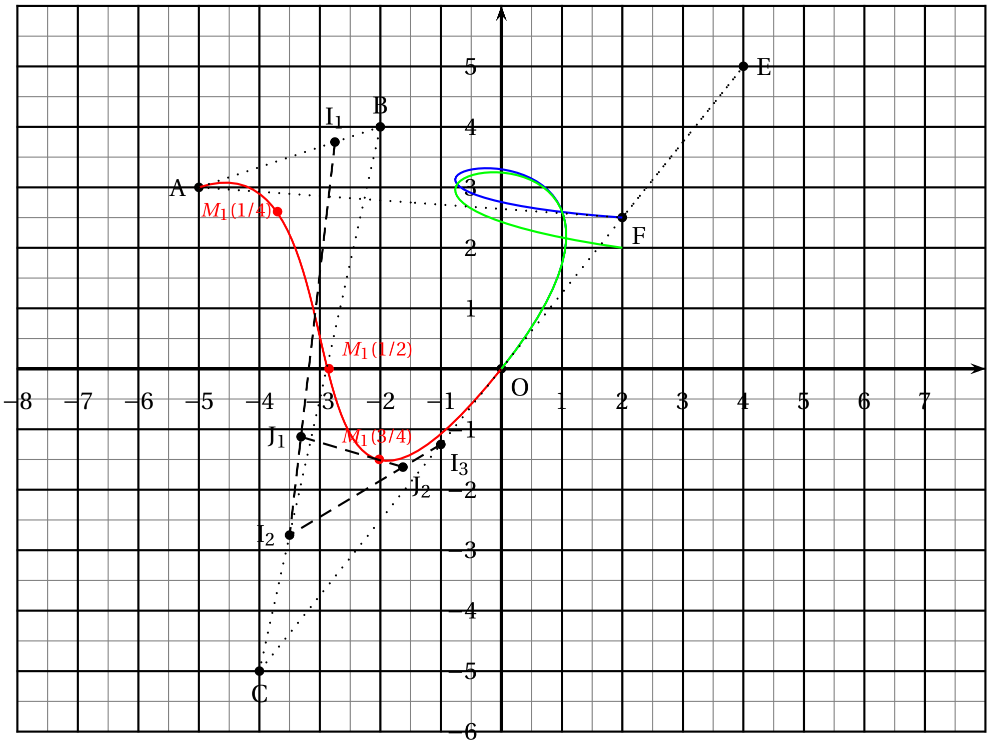
t	0		$t_1 \approx 0,2$		$\alpha \approx 0,52$		$t_2 \approx 0,7$		1
$f'(t)$		+	0	−		−	0	+	
$f(t)$	0	↗	1,07	↘	$-0,23$	↘	$-0,76$	↗	2
$g'(t)$		+		+	0	−		−	
$g(t)$	0	↗		↗	3,32	↘		↘	2,5

5. La tangente est parallèle à l'axe des abscisses au point $M(\alpha)$, car $g'(\alpha) = 0$ et la tangente est parallèle à l'axe des ordonnées au points $M(t_1)$ et $M(t_2)$ car $f'(t_1) = f'(t_2) = 0$.
6. Voir l'annexe.
7. Voir l'annexe.

Partie C

1. Pour la courbe C_1, la tangente au point O est la droite (CO). Pour la courbe C_2, la tangente au point O est la droite (OE).
   Par définition, le point E est le symétrique du point C par rapport à l'origine O, donc les trois points E, C, O sont alignés, les droites (CO) et (OE) sont parallèles et égales.
   Au raccordement entre les deux courbes les tangentes sont les mêmes.
2. Par propriété des courbes de Bézier, pour modifier les tangentes au point O des courbes C_1 et C_2, il faut modifier la position des points O , C et (ou) E. Comme le point E est défini par rapport au point C, la seule modification possible autre que O est la position du point C.
   Si le point C est modifié, le point E reste le symétrique de C par rapport à O, les droites (CO) et (EO) resteront confondues et par conséquent le raccordement sera tangent.
3. Avec une ordonnée plus petite la dernière partie de C_2 sera plus basse donc la boucle sera plus large (voir la modification en vert).

ANNEXE



t	0	0,10	0,20	0,30	0,52	0,70	0,80	0,90	1
$f(t)$	0	0,84	1,07	0,87	$-0,23$	$-0,76$	$-0,51$	0,35	2
$g(t)$	0	1,30	2,23	2,84	3,32	3,13	2,91	2,69	2,5