Corrigé du brevet de technicien supérieur
Conception de produits industriels session 2008

Exercice 1 **6 points**

A. Résolution d'une équation différentielle

$$(E) \quad : \quad y" - y = (-4x-6)\mathrm{e}^{-x}$$

1.

$$(E_0) \quad : \quad y'' - y = 0.$$

On sait que les solutions de cette équation sont les fonctions définies par :

$$f(x) = \lambda\mathrm{e}^{x} + \mu\mathrm{e}^{-x}, \text{ avec } \lambda, \mu \text{ réels.}$$

2. $g(x) = \left(x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x}$. Donc pour tout réel,
$g'(x) = (2x+4)\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(2x+4-x^2-4x\right) = \mathrm{e}^{-x}\left(4-2x-x^2\right)$, puis
$g''(x) = (-2-2x)\mathrm{e}^{-x} - \left(4-2x-x^2\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(-2-2x-4+2x+x^2\right) = \left(x^2-6\right)\mathrm{e}^{-x}$.
Donc $g''(x) - g(x) = \left(x^2-6\right)\mathrm{e}^{-x} - \left(x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2-6-x^2-4x\right) =$
$(-4x-6)\mathrm{e}^{-x}$.
La fonction g est bien une solution particulière de (E).

3. La solution générale est la somme d'une solution particulière et d'une solution quelconque de l'équation sans second membre, donc de la forme :

$$f(x) = \left(x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x} + \lambda\mathrm{e}^{x} + \mu\mathrm{e}^{-x}, \text{ avec } \lambda, \mu \text{ réels.}$$

4. La fonction f a pour dérivée f' telle que :
$f'(x) = \mathrm{e}^{-x}\left(4-2x-x^2\right) + \lambda\mathrm{e}^{x} - \mu\mathrm{e}^{-x}$.
Les conditions $f(0) = 3$ et $f'(0) = 1$ conduisent au système :

$$\left\{\begin{array}{rcl} \lambda+\mu &=& 3\\ 4+\lambda-\mu &=& 1\end{array}\right. \Rightarrow \text{(par somme) } 4+2\lambda = 4 \iff \lambda = 0.$$

Il suit $0+\mu = 3 \iff \mu = 3$.
La solution particulière est donc :

$$f(x) = \left(x^2+4x\right)\mathrm{e}^{-x} + 3\mathrm{e}^{-x} = \left(x^2+4x+3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

B. Étude locale d'une fonction

$$f(x) = \left(x^2+4x+3\right)\mathrm{e}^{-x}.$$

1. a. Le développement limité, à l'ordre 2, au voisinage de 0, de e^{-x} est :

$$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} + x^2\epsilon(x), \text{ avec } \lim_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$$

b. On a donc :

$f(x) = \left(x^2+4x+3\right)\text{e}^{-x} = \left(x^2+4x+3\right)\left(1-x+\dfrac{x^2}{2!}+x^2\epsilon(x)\right) = x^2+4x+3-x^3-4x^2-3x+\dfrac{x^4}{2}+2x^3+\dfrac{3x^2}{2}+x^2\epsilon'(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon'(x)=0$, soit

$f(x) = 3+x-\dfrac{3}{2}x^2+x^2\epsilon''(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon''(x)=0$.

2. a. On reconnaît dans le début du développement limité la forme linéaire $y=3+x$ équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.

b. On a $f(x)-(3+x) = -\dfrac{3}{2}x^2+x^2\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x)=0$.

La différence est négative ce qui signifie qu'au voisinage de l'origine la courbe est sous sa tangente.

Exercice 2 **5 points**

A. Étude des variations d'une fonction

$$f(x) = (ax+b)\text{e}^{-x}$$

1. Les deux données se traduisent par : $\left\{\begin{array}{l c l}-2 &=& f(0)\\ 0 &=& f(2)\end{array}\right.$ soit :

$\left\{\begin{array}{l c l}-2 &=& b\\ 0 &=& (2a+b)\text{e}^{-2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}-2 &=& b\\ 0 &=& 2a-2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l c l}b &=& -2\\ a &=& 1\end{array}\right.$. On a donc $f(x) = (x-2)\text{e}^{-x}$.

2. a. La fonction f produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur cet ensemble et $f'(x) = \text{e}^{-x}-(x-2)\text{e}^{-x} = \text{e}^{-x}(1-x+2) = (3-x)\text{e}^{-x}$.

b. On sait que quel que soit le réel x, $\text{e}^{-x}>0$; le signe de $f'(x)$ est celui de $3-x$;

- $x<3$: $f'(x)>0$: la fonction est donc croissante sur $]-\infty~;~3[$;
- $x>3$: $f'(x)<0$: la fonction est donc décroissante sur $]3~;~+\infty[$.

c.

x	$-\infty$		3		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	e^{-3}	$\searrow$	0

B. Calcul intégral

On note $I = \displaystyle\int_0^2 f(x)\,\text{d}x$.

1. On pose : $u(x)=x-2$ et $v'(x)=\text{e}^{-x}$; d'où :

$u'(x)=1$ et $v(x)=-\text{e}^{-x}$.

On intègre par parties :

$I = [u(x)v(x)]_0^2 - \left(-\displaystyle\int_0^2 \text{e}^{-x}\,\text{d}x\right) = \left[-(x-2)\text{e}^{-x}\right]_0^2 + \displaystyle\int_0^2 \text{e}^{-x}\,\text{d}x = 0-2\text{e}^{-2}+\left[\text{e}^{-x}\right]_0^2 = -2\text{e}^{-2}+\text{e}^{-2}-1 = -1-\text{e}^{-2}$.

2. **a.** On a vu qu'entre 0 et 2, la fonction est négative, donc l'aire de la surface limitée par les axes de coordonnées et la courbe $\mathscr{C}$ entre les points A et B d'abscisses respectives 0 et 2 est en unités d'aire l'opposée de l'intégrale précédente.
Or l'unité d'aire est égale à $2 \times 2 = 4$ cm^2.
Donc $S = 4\left(1 + \mathrm{e}^{-2}\right)$.

b. La calculatrice donne $S \approx 4,541$ soit 4,54 cm^2 au centième près

Exercice 3 **9 points**

A. Construction d'une courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$

Dans cette question, on s'intéresse à la courbe de Bézier $\mathscr{C}_1$ définie par les quatre points de définition A(0 ; 1) ; B(2 ; 1) ; C(0 ; 2) ; D(0 ; 4), dans cet ordre.

1. • $B_{0,\,3} = (1-t)^3 = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$;
• $B_{1,\,3} = 3t(1-t)^2 = 3t\left(1 - 2t + t^2\right) = 3t - 6t^2 + 3t^3$.

2. On a par définition

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_1(t) & = & 2B_{1,\,3}(t) \\ y & = & g_1(t) & = & B_{0,\,3}(t) + B_{1,\,3}(t) + 2B_{2,\,3}(t) = 4B_{3,\,3}(t) \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

soit

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_1(t) & = & 2\left(3t - 6t^2 + 3t^3\right) \\ y & = & g_1(t) & = & 1 - 3t + 3t^2 - t^3 + 3t - 6t^2 + 3t^3 + 2\left(3t^2 - 3t^3\right) + 4t^3 \end{array}\right. \quad \text{ou}$$

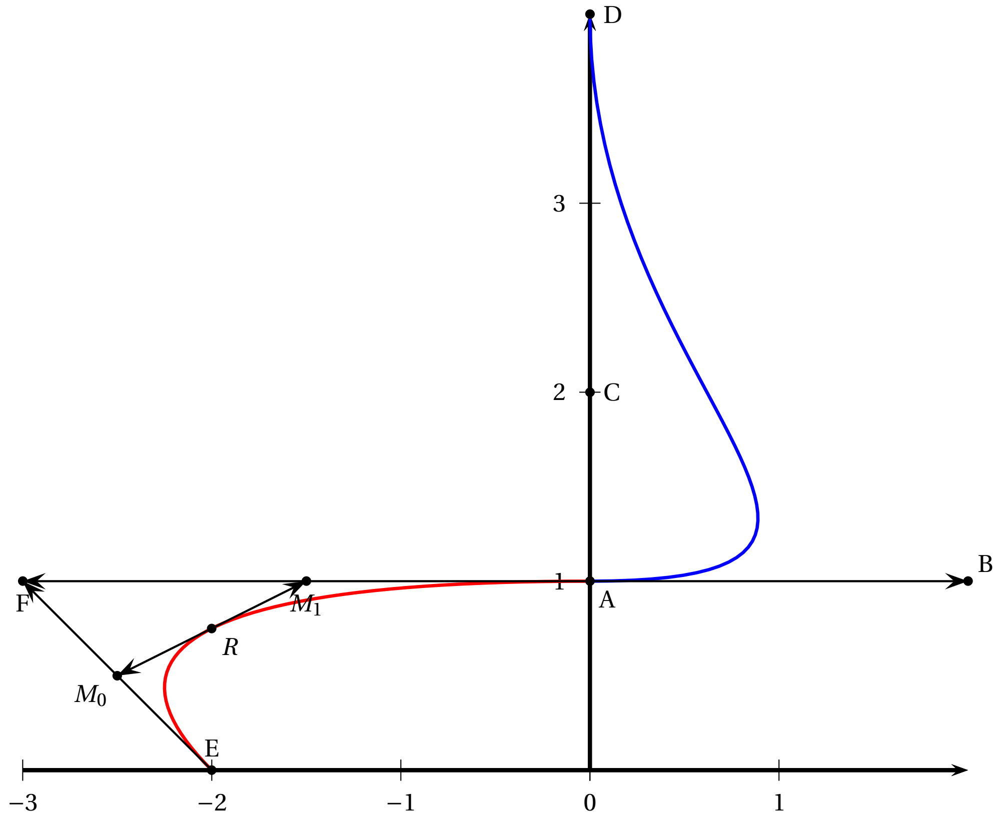
$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_1(t) & = & 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y & = & g_1(t) & = & 1 - 3t + 3t^2 - t^3 + 3t - 6t^2 + 3t^3 + 6t^2 - 6t^3 + 4t^3 \end{array}\right. \quad \text{et enfin}$$

$$\left\{\begin{array}{lllll} x & = & f_1(t) & = & 6t - 12t^2 + 6t^3 \\ y & = & g_1(t) & = & 1 + 3t^2 \end{array}\right. \quad \text{où } t \text{ appartient à l'intervalle } [0\,;\,1].$$

3. • $f_1'(t) = 6 - 24t + 18t^2 = 6\left(1 - 4t + 3t^2\right)$. $f_1'(t)$ est du signe du trinôme $3t^2 - 4t + 1$.
Pour ce trinôme $\Delta = 16 - 12 = 4 = 2^2$; ses racines sont $\dfrac{4+2}{6} = 1$ et $\dfrac{4-2}{6} = \dfrac{1}{3}$.
$f'(t)$ est positif sauf entre $\dfrac{1}{3}$ et 1.
• $f_2'(t) = 6t$ qui est positif sur $[0\,;\,1]$. D'où le tableau de variations commun :

t	0		$\frac{1}{3}$		1
$f_1'(t)$		+	0	−	0
$f_1(t)$	0	↗	$\frac{8}{9}$	↘	0
$f_2'(t)$		+		+	
$f_2(t)$	1	↗	$\frac{5}{3}$	↗	4

4. Tangente horizontale aux points $M_0(0\,;\,1)$;
Tangentes verticales aux points $M_{\frac{1}{3}}\left(\frac{8}{9}\,;\,\frac{5}{3}\right)$ et $M_1(0\,;\,4)$.
5. Par définition des courbes de Bézier la droite (AB) est tangente à la courbe pour $t = 0$; on peut également calculer les coordonnées du vecteur tangent $\overrightarrow{t}_0\left(x'(0)\,;\,y'(0)\right)$ soit $\overrightarrow{t}(6\,;\,0)$; or les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont $\overrightarrow{\text{AB}}(2\,;\,0)$; $\overrightarrow{t_0}$ et $\overrightarrow{\text{AB}}$ sont bien colinéaires.
6.



B. Étude géométrique et construction d'une courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$

On considère la courbe de Bézier $\mathscr{C}_2$ définie par les trois points de définition E$(-2\,;\,0)$; F$(-3\,;\,1)$ et A$(0\,;\,1)$ dans cet ordre.

1. Voir la figure plus haut.
2. M_0 est le milieu de [EF], donc $M_0(-2,5\,;\,0,5)$;
M_1 est le milieu de [FA], donc $M_1(-1,5\,;\,1)$;
R est le milieu de $[M_0M_1]$, donc $R(-2\,;\,0,75)$.
3. Pour $t = \frac{1}{2}$, on a $x = -2-1+1 = -2$ et $y = 1-\frac{1}{4} = \frac{3}{4}$: c'est bien le point R.
4. Le point A correspond à $t = 1$. les coordonnées du vecteur tangent en A à $\mathscr{C}_2$ sont $\left(x'(1)\,;\,y'(1)\right)$ soit $(6;0)$ (d'après le tableau de variations) et les coordonnées de $\overrightarrow{\text{AF}}$ sont $(-3\,;\,0)$: les vecteurs sont bien colinéaires.
5. On a vu que le vecteur tangent à $\mathscr{C}_1$ en A a pour coordonnées $(6;0)$ et que le vecteur tangent à $\mathscr{C}_2$ en A a pour coordonnées $(-3\,;\,0)$; ces vecteurs sont colinéaires donc ces tangentes sont égales.
6. Voir ci-dessus en rouge.