Éléments de correction du BTS Métropole
14 mai 2018 - Comptabilité et gestion [1]

Exercice 1

On note U_n le prix en euros du kWh à l'année $(2015+n)$. On a donc $U_0 = 0{,}140$.

1. $U_1 = U_0 + 0{,}06 \times U_0 = 1{,}06U_0 = 0{,}148$ et $U_2 = U_1 + 0{,}06 \times U_1 = 1{,}06U_1 = 0{,}157$.
2. La suite (U_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}06$ dont le premier terme est $U_0 = 0{,}14$.
3. Pour calculer les termes de la suite (U_n), il faut saisir la formule $C3 = 1{,}06 \times C2$.
4. $U_n = U_0 q^n = 0{,}14 \times 1{,}06^n$
5. Au 1er janvier 2024, $n = 9$ et $U_9 = 0{,}14 \times 1{,}06^9 = 0{,}237$. Donc en 2024, avec ce modèle, le prix du kWh vaudra 0,237 €
6. On cherche n tel que $U_n \geqslant 2 \times U_0$, c'est-à-dire $U_0 q^n \geqslant 2 \times U_0$, ou encore $1{,}06^n \geqslant 2$, soit $n \geqslant 11{,}78$,

   Conclusion : c'est à partir de 2027 que le prix du kWh sera doublé.

Exercice 2

Partie A - Étude d'une fonction

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[15\,;\,50]$ par

$$f(t) = \left(20t^2 - 60t - 1\,080\right)\mathrm{e}^{-0{,}1t}.$$

1. f est dérivable sur l'intervalle $[15\,;\,50]$ et on note f' sa fonction dérivée.

   Pour tout t de l'intervalle $[15\,;\,50]$, on a :

   $f'(t) = (40t - 60)\,\mathrm{e}^{-0{,}1t} - 0{,}1\left(20t^2 - 60t - 1\,080\right)\mathrm{e}^{-0{,}1t}$

   $f'(t) = \left(-2t^2 + 46t + 48\right)\mathrm{e}^{-0{,}1t}$

   $-2t^2 + 46t + 48$ est un polynôme du second degré, il a deux racines $t_1 = -1$ et $t_2 = 24$, donc $-2t^2 + 46t + 48 = -2(t-24)(t+1)$, comme $-2(t-24) = 48 - 2t$, on a immédiatement :

   $$f'(t) = (48 - 2t)(t+1)\mathrm{e}^{-0{,}1t}.$$

2. Sur l'intervalle $[15\,;\,50]$, $(t+1)\mathrm{e}^{-0{,}1t}$ est strictement positif, donc le signe de $f'(t)$ est celui de $48 - 2t$.

   Pour tout $t \in [15\,;\,24]$, $f'(t) \geqslant 0$ et

   Pour tout $t \in [24\,;\,50]$, $f'(t) \leqslant 0$
3. D'où le tableau de variation de la fonction f sur $[15\,;\,50]$:

1. Candidats libres

x	15		24		50
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	$\dfrac{2520}{\mathrm{e}^{1,5}}$	↗	$\dfrac{9000}{\mathrm{e}^{2,4}}$	↘	$\dfrac{45900}{\mathrm{e}^{5}}$

Le maximum de f , sur cet intervalle, est égal à 816 .

Partie B - Application de la partie A

Une société extrait du pétrole d'un gisement. Elle estime que la production annuelle de pétrole extraite (mesurée en centaines de milliers de barils par an) à partir de 2015, pourra être modélisée par la fonction f, étudiée à la partie A, en fonction du temps t (en années) écoulé depuis l'année 2000.

1. D'après A. 3, la production annuelle de pétrole sera maximale en 2024.
Cette production maximale vaut 816 461 barils

2. **a.** Si la variable m contient la valeur 18 avant l'exécution de cet algorithme, la valeur de la variable *total* à la fin de son exécution est égale à la somme $f(15) + f(16) + f(17) + f(18)$, et elle vaut 2570,496

b. Dans le contexte de l'énoncé, cet algorithme permet d'estimer la production totale, en barils, entre 2015 et 2000+18 .

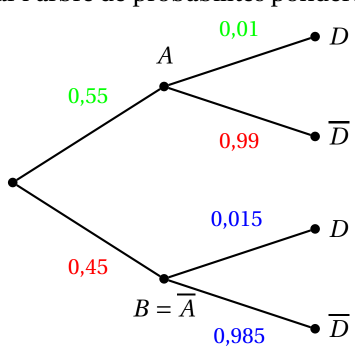
Exercice 3

Partie A - Probabilités conditionnelles

On considère les évènements suivants :
A : « Le microprocesseur provient de l'entreprise A »
D : « Le microprocesseur est défectueux »

1. **a.** D'après l'énoncé on a : $P(A) = 0,55$ et $P_A(D) = 0,010$.

b. L'énoncé peut être traduit par l'arbre de probabilités pondéré, suivant :



2. $P(A \cap D) = P(A) \times P_A(D) = 0,55 \times 0,01 = 0,0055$ et

$P\left(\overline{A} \cap D\right) = P(\overline{A}) \times P_{\overline{A}}(D) = 0,45 \times 0,015 = 0,00675$.

3. La probabilité de prélever un microprocesseur défectueux est :
$P(D) = P(A \cap D) + P\left(\overline{A} \cap D\right) = 0{,}0055 + 0{,}00675$ soit 0,012 25.
4. La probabilité que le microprocesseur provienne de l'entreprise B sachant qu'il est défectueux est $P_D(B) = P_D(\overline{A}) = \dfrac{P\left(\overline{A} \cap D\right)}{P(D)} = \dfrac{0{,}00675}{0{,}01225} \approx 0{,}551$.

Partie B - Loi normale

On suppose que la variable aléatoire Y suit une loi normale de moyenne 8 000 et d'écart type 100.

1. $P(Y \leqslant 8\,150) = 0{,}93$.
Interprétation : Pour une journée choisie au hasard, la probabilité qu'il y ait au plus 8150 demandes de téléphone portables est 0,93.
2. $P(7\,950 \leqslant Y \leqslant 8\,050 = 0{,}38$.
3. Y suit une loi normale de moyenne $\mu = 8\,000$ et d'écart type $\sigma = 100$
$7800 = \mu - 2\sigma$ et $8200 = \mu + 2\sigma$, d'après la règle empirique
$P(\mu - 2\sigma \leqslant Y \leqslant \mu + 2\sigma) \approx 0{,}95$
Donc, sans utiliser la calculatrice , $P(7\,800 \leqslant Y \leqslant 8\,200)$ est, à 10^{-2} près, 0,95.