∽ Corrigé du BTS Métropole – mai 2022 ∾
Groupement B1

Exercice 1 : un problème de routage — 5 points

Un chariot d'une fête foraine est propulsé à une vitesse de 20 m.s^{-1} sur un axe horizontal, puis il est ralenti par un système de freinage.
On s'intéresse à la vitesse du chariot durant le freinage.
On note $f(t)$ la vitesse du chariot à l'instant t.
$f(t)$ est exprimé en mètre par seconde, et t est exprimé en seconde.
L'instant $t = 0$ correspond à l'instant où le chariot commence à être pris en charge par le système de freinage. On a donc $f(0) = 20$.

On suppose que f est une fonction dérivable sur $[0~;~+\infty[$ et on note f' sa fonction dérivée.

Partie A - Résolution d'une équation différentielle.

On admet que la fonction f est solution de l'équation différentielle (E) : $\quad y' + 0,8y = 4$,
où y est une fonction inconnue et où y' est la fonction dérivée de y.

1. **a.** On résout l'équation différentielle (E_0) : $\quad y' + 0,8y = 0$.
   L'équation différentielle $y' + ay = 0$ a pour solutions les fonctions définies par $y(t) = k\,\text{e}^{-at}$, où $k \in \mathbb{R}$, donc l'équation différentielle $y' + 0,8y = 0$ a pour solutions les fonctions définies par $y(t) = k\,\text{e}^{-0,8t}$, où $k \in \mathbb{R}$.

   b. Soit g la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par $g(t) = 5$.
   $g'(t) = 0$ donc $g'(t) + 0,8g(t) = 0 + 0,8 \times 5 = 4$ donc la fonction g est solution de l'équation différentielle (E).

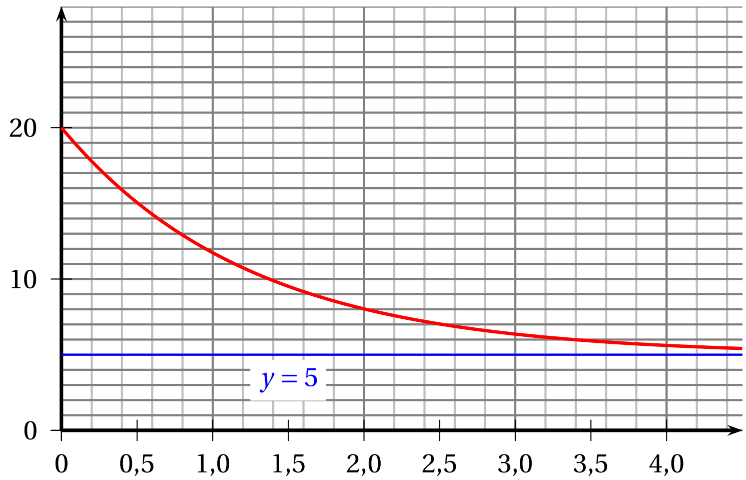
   c. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont donc les fonctions définies par $y(t) = k\,\text{e}^{-0,8t} + 5$, où $k \in \mathbb{R}$.

2. On cherche k pour que $f(0) = 20$ en prenant $f(t) = k\,\text{e}^{-0,8t} + 5$:
   $f(0) = 20 \iff k\,\text{e}^{0} + 5 = 20 \iff k = 15$
   Donc la solution f de l'équation (E) qui vérifie la condition initiale $f(0) = 20$ est la fonction f définie sur $[0~;~+\infty[$ par $f(t) = 15\,\text{e}^{-0,8t} + 5$.

Partie B - Étude de la fonction f

On admet que la fonction f est définie pour tout $t \in [0~;~+\infty[$ par : $f(t) = 15\,\text{e}^{-0,8t} + 5$.

Sa courbe représentative $\mathscr{C}$ dans un repère orthogonal est donnée ci-dessous.



1. **a.** $\lim\limits_{T\to-\infty} \text{e}^{T} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} (-0,8t) = -\infty$ donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \text{e}^{-0,8t} = 0$;
on en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 5$.

b. On peut donc dire que la courbe $\mathscr{C}$ admet la droite d'équation $y = 5$ comme asymptote horizontale en $+\infty$.

2. On admet que, pour tout réel t appartenant à $[0\,;\,+\infty[$ on a : $f'(t) = -12\,\text{e}^{-0,8t}$.
Pour tout réel x, $\text{e}^{x} > 0$ donc pour tout t, $\text{e}^{-0,8t} > 0$; on en déduit que, pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, on a $-12\,\text{e}^{-0,8t} < 0$ donc $f'(t) < 0$.
La fonction f est donc strictement décroissante sur $[0\,;\,+\infty[$.
$f(0) = 20$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 5$; on établit le tableau de variation de f sur $[0\,;\,+\infty[$:

t	0	$+\infty$
$f'(t)$	$-$	
$f(t)$	20 ↘	5

3. D'après le tableau de variation de f, on peut dire que, pour tout t de $[0\,;\,+\infty[$, $f(t) > 5$; donc la vitesse restera supérieure à 5 m.s^{-1} donc le système de freinage ne permet pas au chariot de s'arrêter.

4. Soit F la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = -18,75\,\text{e}^{-0,8t} + 5t$.

a. Sur $[0\,;\,+\infty[$, $F'(t) = -18,75 \times (-0,8)\,\text{e}^{-0,8t} + 5 = 15\,\text{e}^{-0,8t} + 5 = f(t)$
donc la fonction F est une primitive de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$.

b. On admet que la distance d, exprimée en mètre, parcourue par le chariot entre les instants t_0 et t_1 est donnée par : $d = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} f(t)\,\text{d}t$.
La valeur exacte de la distance parcourue par le chariot entre l'instant $t_0 = 0$ et $t_1 = 1$ est :

$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \left[F(t)\right]_0^1 = F(1)-F(0) = \left(-18,75\,\mathrm{e}^{-0,8}+5\right)-\left(-18,75\,\mathrm{e}^{0}+0\right)$$
$$= -18,75\,\mathrm{e}^{-0,8}+5+18,75 = 23,75-18,75\,\mathrm{e}^{-0,8} \approx 15,33$$

Partie C – Étude locale

On étudie la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par : $f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0,8t}+5$.

On rappelle que sa courbe représentative $\mathscr{C}$ est reproduite au début de la partie B.

Un logiciel de calcul formel affiche la partie régulière du développement limité à l'ordre 2 de la la fonction f au voisinage de 0.

1	PolynômeTaylor$(f(t), t, 0, 2)$ • $20-12t+\dfrac{24}{5}t^2$

1. On donne 3 propositions pour le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de 0 :

$20-12t+\dfrac{24}{5}t^2+\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$	$20+\dfrac{24}{5}t^2$	$20-12t+4,8t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

Le développement limité de la fonction f à l'ordre 2 au voisinage de zéro est :
$20-12t+4,8t^2+t^2\varepsilon(t)$ avec $\lim\limits_{t\to 0}\varepsilon(t)=0$

2. Une équation de la tangente T à la courbe $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0 est donc :
$y = 20-12t$.

Exercice 2 — 10 points

Une usine fabrique des tubes fluorescents. Des tests de conformité permettent de vérifier si les tubes présentent un défaut.

Partie A - Probabilités conditionnelles

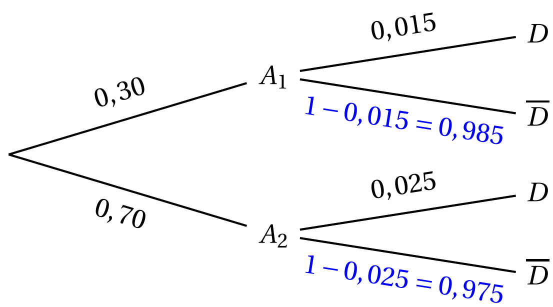
L'entreprise possède deux ateliers de production des tubes : atelier 1 et atelier 2.

- L'atelier 1 produit 30 % des tubes.
  - Parmi eux, 1,5 % présentent un défaut.
- L'atelier 2 produit 70 % des tubes.
  - Parmi eux, 2,5 % présentent un défaut.

On prélève au hasard un tube parmi la production totale de l'usine. On définit les évènements suivants :

- A_1 : « le tube provient de l'atelier 1 » ;
- A_2 : « le tube provient de l'atelier 2 » ;
- D : « le tube présente un défaut ».

1. On réalise un arbre pondéré décrivant la situation.



2. $P(A_1 \cap D) = P(A_1) \times P_{A_1}(D) = 0,30 \times 0,015 = 0,0045$

3. D'après la formule des probabilités totales :
$P(D) = P(A_1 \cap D) + P(A_2 \cap D) = 0,0045 + 0,70 \times 0,025 = 0,022$

4. On sait que le tube ne présente pas de défaut.
La probabilité qu'il provienne de l'atelier 2 est :
$$P_{\overline{D}}(A_2) = \frac{P\left(A_2 \cap \overline{D}\right)}{P\left(\overline{D}\right)} = \frac{0,70 \times 0,975}{1-0,022} \approx 0,698$$

Partie B - Durée de vie des tubes fluorescents

On considère la variable aléatoire T qui, à tout tube fluorescent prélevé au hasard dans le stock, associe sa durée de bon fonctionnement en heure.

On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0001$.

1. L'espérance de la variable aléatoire T est $E(T) = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,0001} = 10000$.
La durée de vie moyenne d'un tube fluorescent est donc de 10 000 heures.

2. $P(T \leqslant t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ donc $P(T \leqslant 8000) = 1 - \mathrm{e}^{-0,0001 \times 8000} \approx 0,55$
Donc la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit inférieure à 8 000 heures est de 0,55.

3. $P(T > 10000) = 1 - P(T \leqslant 10000) = 1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-0,0001 \times 10000}\right) = \mathrm{e}^{-0,0001 \times 10000} \approx 0,37$
Donc la probabilité, arrondie à 10^{-2}, que la durée de bon fonctionnement du tube fluorescent prélevé soit supérieure à 10 000 heures est de 0,37.

Partie C - Intervalle de confiance

La fixation des tubes fluorescents se fait à l'aide de rivets produits dans une usine. On cherche la proportion p de rivets conformes parmi l'ensemble de la production. Pour cela, on prélève au hasard dans la production un échantillon de 1 000 rivets. Ce prélèvement peut être assimilé à un tirage au sort avec remise.

On constate que, sur les 1 000 rivets prélevés, 975 d'entre eux sont conformes.

1. Une estimation ponctuelle f de la proportion inconnue p est $f = \dfrac{975}{1\,000} = 0,975$.
2. Soit F la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 1 000 rivets ainsi prélevé, associe la fréquence, dans cet échantillon, des rivets conformes.

   On admet que F suit la loi normale de moyenne p inconnue et d'écart type $\sqrt{\dfrac{p(1-p)}{1\,000}}$.

   Un intervalle de confiance centré sur f de la proportion p au niveau confiance de 95 % est :

   $$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\ ;\ f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}}\right]$$

   $$= \left[0,975 - 1,96\sqrt{\frac{0,975(1-0,975)}{1\,000}}\ ;\ 0,975 + 1,96\sqrt{\frac{0,975(1-0,975)}{1\,000}}\right]$$

   $$\approx [0,965\ ;\ 0,985]$$