Corrigé du BTS CGO Métropole 13 mai 2015

Mohamed Hassnaoui
UPO lyon

17 mai 2015

Exercice 1

Partie A

1. D'après l'énoncé : $P(C) = 0,02$ et $P(J) = 0,03$
2. $P(E) = P($« le sac présente les deux défauts »$) = P(C \cap J)$. Les évènements C et J sont indépendants donc $P(E) = P(C) \times P(J) = 0,0006$
3. $P(D) = P($« le sac présente au moins un des deux défauts »$) = P(C \cup J) = P(C) + P(J) - P(C \cap J) = 0,02 + 0,03 - 0,0006 = 0,0494$.
4. On peut remarquer que les évènements A et D sont complémentaires, donc $P(A) = 1 - P(D) = 0,9506$
5. On cherche $P_D(E) = \dfrac{P(D \cap E)}{P(D)}$, mais $D \cap E = E$, donc $P_D(E) = \dfrac{P(E)}{P(D)} \approx 0,0121$.

Partie B

1. Chaque prélèvement d'un sac est une épreuve de Bernoulli, avec les deux évènements contraires : **succès** qui correspond à un sac **défectueux** et échec qui correspond à un sac non défectueux, d'après l'énoncé **P(succès)=0,0494**. Cette **même épreuve** est **répétée 40 fois**, de plus les épreuves sont **indépendantes** car le prélèvement des 40 sacs est assimilé à un tirage avec remise. La variable aléatoire X qui est égale au nombre de succès, à l'issue de cette expérience aléatoire, est la somme de 40 variables de Bernoulli identiques et indépendantes de paramètre $p = 0,0494$. D'où X suit la **loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0,0494$**.
   On écrit : $X \sim> \mathscr{B}(40\ ;\ 0,0494)$
2. La probabilité qu'il y ait exactement un sac défectueux
$$P(X = 2) = 0,278$$
3. La probabilité qu'il y ait au moins 3 sacs non défectueux est :
$$P(X \geqslant 3) = 1 - P(X \leqslant 2).\text{ mais } P(X \leqslant 2) \approx 0,683, \text{ donc } P(X \geqslant 3) \approx 0,317$$

Partie C

Rappel :
Si $X \sim> \mathscr{N}(m\,;\sigma)$, pour tout réel a, strictement positif,
i. $P(X \leqslant m - a) = P(X \geqslant m + a)$;
ii. Si $P(m - a \leqslant X \leqslant m + a) = 1 - \alpha$, alors $P(X \leqslant m - a) = P(X \geqslant m + a) = \dfrac{\alpha}{2}$

1. $V \sim> \mathcal{N}(3,15\,;\,0,1)$ (cette année les étudiants n'avaient pas la possibilité d'utiliser les fameuses tables de probabilité. Inutile de centrer et réduire, il faut savoir utiliser la calculatrice en exploitant les propriétés de la densité de probabilité de la loi normale).

   Dans cette question il fallait préciser que $a > 0$.

   En effet, $P(3,15 - a \leqslant V \leqslant 3,15 + a) = 0,95 = 1 - 0,05$ est équivaut à $P(3,15 - a \leqslant X) = 0,025$, avec une calculatrice on obtient : $3,15 - a \approx 2,95$, d'où $\boxed{a = 0,20}$

2. Interprétation : 95% des sacs ont un volume compris entre $2,95$ litres et $3,35$ litres.

3. **a.** P(« sac rejeté ») $= P(X < 2,9)$, avec une calculatrice on trouve $P(X < 2,9) \approx 0,006$

   b. On remarque que $P(X < 2,9) = P(X < 3,15 - 0,25)$, d'après le rappel ci-dessus, $P(X < 3,15 - 0,25) = P(X > 3,15 + 0,25) = P(X > 3,4)$, finalement : $\boxed{P(X > 3,4) \approx 0,006}$.

Exercice 2

Partie A

1. **a.** Les points du nuage semblent alignés, on peut envisager un ajustement affine sur la période de 2004 à 2011.

   b. le coefficient de corrélation linéaire est $r \approx 0,997$, $r \approx 1$, donc les deux variables x, rang de l'année et y, taux d'équipement, sont fortement corrélées. Donc cette forte corrélation permet d'envisager un ajustement affine (en tenant compte de la disposition des points du nuage).

2. Une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés est

$$y = 4,06x + 41,68$$

   La droite de régression passe par le point moyen $G(4,5\ ;\ 58,9625)$ et le point $M(10\ ;\ 82,309)$ (Voir annexe)

3. $x = 9$ est le rang de l'année 2012, d'après l'ajustement affine, le taux d'équipement est $\boxed{y_{2012} = 78,22\,\%}$.

4. On utilise toujours le même ajustement. On cherche x tel que $4,06x + 41,68 > 85$, ce qui équivaut à $x > 10,67$. on peut en déduire que le taux d'équipement dépassera 85% à partir de l'année 2014.

5. On cherche x tel que $4,06x + 41,68 = 100$, c'est à dire $x \approx 14,36$, ce qui signifie le modèle d'ajustement employé montre qu'en 2018, le taux d'équipement dépassera les 100 %, ce qui ne semble pas réaliste. Car à très long terme on n'atteindra probablement pas un taux d'équipement de 100 %

Partie B

$$f(x) = -0,154x^2 + 5,45x + 39,36$$

1. **a.** f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x) = -0,308x + 5,45$, f' s'annule en $x_0 = \frac{5,45}{0,308} \approx 17,68$

   b. $f'(x) \leqslant 0$ si $x \geqslant \frac{5,45}{0,308} = \frac{2725}{154}$ et $f'(x) \leqslant 0$ sur $\left[1\ ;\ \frac{2725}{154}\right]$

   c. $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -0,154x^2 = -\infty$ et $f(\frac{5,45}{0,308}) \approx 87,58$.

   $f(1) = -0,154 + 5,45 + 39,36 = 44,656$.

   Le tableau de variation complet de la fonction f est

x	1		$\frac{2725}{154}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f			$87{,}58$		
	$44{,}656$	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Le coefficient directeur de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est $f'(1) = 5,142$

d. Pour tracer la courbe, on place les points remarquables, ici $(17,69\ ;\ 87,58)$, le maximum, puis on établit un tableau de valeurs :

x	1	6	11	16	21	26	31
y	44,66	66,52	80,68	87,14	85,90	76,96	60,32

2. D'après cet ajustement, le taux d'équipement dépassera 85 % pour les rangs 14 à 21 soit de 2017 à 2024 (voir annexe).

3. a. $f(x)$ est un polynôme du second degré, son discriminant $\Delta > 0$, donc l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : $x_1 \approx -6,152$ et $x_2 \approx 41,542$

b. Sur une longue période le taux d'équipement ne peut pas s'annuler, ceci contredit le résultat obtenu dans 3. a., par conséquent l'ajustement de l'évolution du taux d'équipement par une fonction polynôme du second degré n'est pas réaliste.

Partie C

$$g(x) = \frac{100}{1 + 1,47\mathrm{e}^{-0,17x}}$$

1. a. $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \dfrac{100}{1 + 1,47 \times 0} = 100,$

b. Ce résultat permet de dire que la courbe de g admet une asymptote horizontale d'équation $y = 100$ au voisinage de $+\infty$

c. Cette limite permet d'affirmer que le taux d'équipement en micro-ordinateurs des ménages français atteindra 100 % à long terme.

2. Le rang de l'année 2016 est $x = 13$, et $f(13) \approx 86,11$, donc en 2016 on peut espérer, avec ce modèle d'ajustement, un taux d'équipement de micro-ordinateur de l'ordre de 86 %

Annexe à rendre avec la copie
Exercice 2 Partie A et B