

## ∞ Corrigé du BTS Métropole 15 mai 2023 ∞

### Groupement B1<sup>1</sup>

**L'usage de calculatrice avec mode examen actif est autorisé**  
**L'usage de calculatrice sans mémoire « type collègue » est autorisé**

#### Exercice 1

**10 points**

#### Partie A – Résolution d'une équation différentielle

1. a. Résolvons  $r^2 + 5r + 4 = 0$ .

$$\Delta = 5^2 - 4 \times 1 \times 4 = 25 - 16 = 9$$

Les solutions sont :

$$r_1 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2 \times 1} = -4 \text{ et } r_2 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2 \times 1} = -1.$$

- b. Les solutions de l'équation différentielle ( $E_0$ ) sont de la forme :

$$C_1 e^{-t} + C_2 e^{-4t} \text{ où } C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2. a. On a  $f(0) = 20$  et  $f'(0) = -10$ .  
 b. La valeur exacte de la distance  $OM$  deux secondes après le début de la fermeture est :

$$f(2) = \frac{70}{3} e^{-2} - \frac{10}{3} e^{-8}$$

*Attention, on demande dans cette question une valeur exacte, et non une valeur approchée.*

- c) Demandons-nous quelle est la distance  $OM$  au bout de quatre secondes :

$$f(4) = \frac{70}{3} e^{-4} - \frac{10}{3} e^{-16} \simeq 0,43 \text{ cm.}$$

Cette distance est inférieure à 0,5 cm, on peut donc considérer que le tiroir est fermé.

#### Partie B – Étude de fonction

1. a. Le rappel nous permet d'affirmer que  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-t} = 0$  et  $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-4t} = 0$ .  
 On en déduit que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \frac{70}{3} \times 0 - \frac{10}{3} \times 0 = 0$$

---

1. Aéronautique, Assistance technique d'ingénieur, Bâtiment, Conception et réalisation de carrosseries, Conception et réalisation des systèmes automatiques, Enveloppe des bâtiments : conception et réalisation, Environnement nucléaire, Fluides - énergies - domotique (3 options), Maintenance des systèmes (3 options), Traitement des matériaux (2 options), Travaux publics

b. La courbe possède ainsi une asymptote d'équation  $y = 0$ .

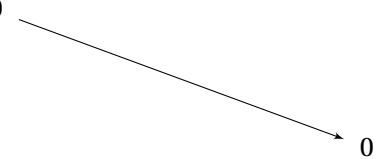
2. a.  $e^{-t}$  et  $e^{-4t}$  se dérivent respectivement en  $-e^{-t}$  et  $-4e^{-4t}$ . Ainsi :

$$f'(t) = \frac{70}{3} \times (-e^{-t}) - \frac{10}{3} \times (-4e^{-4t})$$

$$f'(t) = -\frac{70}{3}e^{-t} + \frac{40}{3}e^{-4t}$$

b. L'énoncé nous indique que la dérivée de  $f$  est négative sur  $[0; +\infty[$ .

$x$	0	$+\infty$
$f'(t)$	-	
$f$	20	0



3. a. Il est nécessaire de compléter jusqu'à la ligne 39.

Ligne	t	f(t)	Condition f(t)>s
Ligne 36	3,6	0,64	Vraie
Ligne 37	3,7	0,58	Vraie
Ligne 38	3,8	0,52	Vraie
Ligne 39	3,9	0,47	Fausse

- b. À la fin de l'exécution de l'algorithme, la variable  $t$  a pour valeur 3,9. Cela signifie que le tiroir est considéré comme fermé à partir de 3,9 secondes.
4. a. L'équation de la tangente  $T$  à la courbe  $\mathcal{C}$  au point d'abscisse correspond à la partie affine du développement limité, soit

$$M(x; y) \in (T) \iff y = 20 - 10t$$

(On peut vérifier que :

$$M(x; y) \in (T) \iff y - f(0) = f'(0)(t - 0)$$

Avec  $f(0) = \frac{70}{3} - \frac{10}{3} = 20$  et  $f'(0) = -\frac{70}{3} + \frac{40}{3} = -10$ , on obtient bien :

$$y - 20 = -10t \iff y = 20 - 10t.$$

- b. Le bon développement est le premier.  
 c. La courbe  $\mathcal{C}$  est au dessous de la tangente en O.

(En effet pour  $t$  voisin de zéro en partant de l'origine O on suit la droite  $(T)$ , partie affine  $20 - 10t$  et pour arriver « pratiquement » sur  $\mathcal{C}$  il faut ajouter  $-15t^2$  qui est négatif quel que soit le signe de  $t$ .)

## Exercice 2

10 points

*Les trois parties peuvent être traitées de façon indépendante*

On s'intéresse à un magasin de vélos.

### Partie A. Probabilités conditionnelles

1. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-contre décrivant la situation.

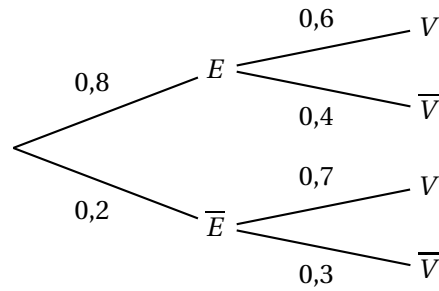
2. On a  $p(E \cap V) = p(V) \times p_E(V) = 0,8 \times 0,6 = 0,48$ .

3. On a de même  $p(\bar{E} \cap V) = p(\bar{E}) \times p_{\bar{E}}(V) = 0,2 \times 0,7 = 0,14$ .

D'après la formule des probabilités totales :

$$p(V) = p(E \cap V) + p(\bar{E} \cap V) = 0,48 + 0,14 = 0,62.$$

4. Il faut trouver  $p_V(E) = \frac{p(V \cap E)}{p(V)} = \frac{p(E \cap V)}{p(V)} = \frac{0,48}{0,62} \approx 0,7741$ , soit 0,774 au millième près.



### Partie B. Loi binomiale

1. La variable aléatoire  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 80$  et  $p = 0,62$ .

2. On a  $p(X = 40) = \binom{80}{40} 0,62^{40} \times (1 - 0,62)^{80-40} = \binom{80}{40} 0,62^{40} \times 0,38^{40} \approx 0,008$  au millième près.

3. On a  $p(X \geq 41) = 1 - p(X < 40) \approx 0,981$  au millième près.

### Partie C. Intervalle de confiance

1. L'estimation ponctuelle  $f$  est égale à  $\frac{54}{90} = \frac{6}{10} = 0,6$

2. a. L'intervalle de confiance est :  $I = \left[ 0,6 - 1,96 \sqrt{\frac{0,6(1-0,6)}{90}} ; 0,6 + 1,96 \sqrt{\frac{f(1-0,6)}{90}} \right]$

soit environ  $I = [0,4987 ; 0,7012]$ .

Au millième près  $I = [0,498 ; 0,702]$ .

b. La réponse est non car il y a un risque égal à 5 %