Durée : 4 heures

∽ CAPLP interne 2008 ∽

EXERCICE 1

Proposition 1 La proposition est vraie. Cela peut se pressentir graphiquement puisque la courbe de f est symétrique par rapport à l'origine du repère et puisque l'intervalle $[-a\,;\,a]$ est centré en 0. Pour obtenir ce résultat, il suffit d'utiliser la relation de Chasles :

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

puis de poser $t = -x$ dans la première intégrale qui devient alors :

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a}^{0} f(-t)\,(-\mathrm{d}t) = -\int_{a}^{0} (-f(t))\,\mathrm{d}t = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Ainsi, on a bien

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-a}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{-0}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{a} f(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Proposition 2

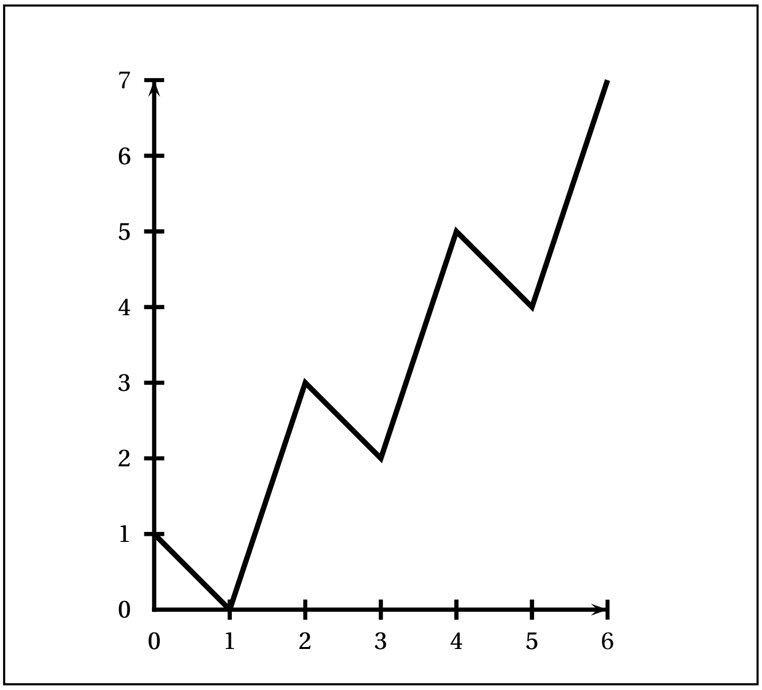
La proposition est vraie. En effet, l'ensemble de définition de f est centré en 1 et pour tout nombre réel $h \neq 0$, on a :

$$\frac{f(1-h)b + f(1+h)}{2} = \frac{\frac{1-h+1}{1-h-1} + \frac{1+h+1}{1+h-1}}{2} = \frac{\frac{2+h}{2} + \frac{h-2}{h}}{2}.$$

Ainsi, le milieu des points de la courbe de représentative de f d'abscisses $1-h$ et $1+h$ a pour ordonnée 1, ce qui signifie que la courbe représentative de f est symétrique par rapport au point de coordonnées $(1\,;\,1)$.

Proposition 3

La proposition est fausse. Le dessin qui suit illustre l'idée d'un contre-exemple :



Si on considère la suite u définie par $u_n = n + (-1)^n$, alors, on a :

$$u_{2n+1} - u_{2n} = -1.$$

ainsi, la suite u n'est pas croissante. Toutefois, on a $u_n \geqslant n-1$ et donc $u_n \longmapsto +\infty$ quand n tend vers plus l'infini.

Proposition 4
La proposition est vraie. En effet, si l'écriture décimale de l'entier naturel n se termine par 5, alors n peut s'écrire $n = 5+10p$ où p est un entier naturel. Ainsi, $n^2 = (5+10p)^2 = 25+100p+100p^2 = 25+100\left(p+p^2\right)$. Puisque $p+p^2$ est un entier naturel, $l00\left(p+p^2\right)$ est un entier dont l'écriture décimale se termine par deux zéros et donc n^2 est un entier naturel dont l'écriture décimale se termine par 25.

Proposition 5
La proposition est vraie. En effet, puisque A, B et C ne sont pas alignés, les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires. Ainsi, si M est un point alors
$M \in (ABC) \iff \exists(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \mu\overrightarrow{AC} \iff \exists(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AM} + \lambda\overrightarrow{MB} + \mu\overrightarrow{AM} + \mu\overrightarrow{MC}$.
$M \in (ABC) \iff \exists(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}^2,\ (1-\lambda-\mu)\overrightarrow{MA} + \lambda\overrightarrow{MB} + \mu\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$.
Ainsi, si on pose $\alpha = 1-\lambda-\mu$, $\beta = \lambda$ et $\gamma = \mu$, on a bien $\alpha+\beta+\gamma = 1 \neq 0$ et M barycentre du système $\left\{(A,\ \alpha),\ \ (B,\ \beta), (C,\ \gamma)\right\}$.
Réciproquement, s'il existe trois réels α, β et γ tels que $\alpha+\beta+\gamma \neq 0$ et tels que M est le barycentre du système $\left\{(A,\ \alpha),\ \ (B,\ \beta), (C,\ \gamma)\right\}$ alors
$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \gamma\overrightarrow{MC} = \overrightarrow{0}$ et donc $\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{MA} + \gamma\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{0}$, soit $(\alpha+\gamma+\gamma)\overrightarrow{AM} = \beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}$.
On a donc $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{\alpha+\gamma+\gamma}\left(\beta\overrightarrow{AB} + \gamma\overrightarrow{AC}\right)$ et de ce fait M appartient bien au plan (ABC).

EXERCICE 2

Partie 1

1. Puisque les tirages sont équiprobables, la probabilité que la boule numéro 1 apparaisse dès le premier tirage vaut $\dfrac{1}{n}$.
2. Puisqu'on remet la boule dans l'urne après tirage, les différents tirages sont indépendants. Si on note U_j l'évènement « la j-ième boule tirée est la numéro 1 », alors l'évènement « $X = k$ » est en fait l'évènement « $\overline{U_1} \cap \overline{U_2} \cap \ldots \cap \overline{U_{k-1}} \cap U_k$ » et donc la probabilité de l'évènement $(X = k)$ vaut :
$P(X = k) = P\left(\overline{U_1} \cap \overline{U_1} \cap \ldots \cap U_{k-1} \cap U_k\right) = P\left(\overline{U_1}\right) \times P\left(\overline{U_2}\right) \times \ldots \times P\left(\overline{U_{k-1}}\right) \times P\left(U_k\right) = \left(1-\dfrac{1}{n}\right) \times \left(1-\dfrac{1}{n}\right) \times \ldots \times \left(1-\dfrac{1}{n}\right) \times \dfrac{1}{n} = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{k-1} \times \dfrac{1}{n}$.
3. Si on pose $q = 1-\dfrac{1}{n}$ et $v_k = P(X = k)$, alors
$$v_{k+1} - v_k = q^{k+1}\frac{1}{n} - q^k\frac{1}{n} = q^k(q-1)\frac{1}{n} = -\frac{q^k}{n^2} < 0.$$
La suite v est donc décroissante et donc la probabilité de l'évènement X =k est maximale pour $k = 1$.
4. L'espérance de X vaut, par définition $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k)$ et donc :
$$E(X) = \sum_{k=1}^{\infty} kP(X = k) = \sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1}\frac{1}{n} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{n}\frac{1}{(q-1)^2} = n.$$

Partie 2

1. Le fait de lire le côté d'une pièce de monnaie que l'on jette plusieurs fois est analogue au fait de lire le numéro d'une boule que l'on prélèverait d'une urne en contenant deux (et qui seraient numérotées 1 et 2) pour l'y replacer ensuite. Compte-tenu de la question précédente, puisque l'espérance de X vaut n, alors, en moyenne, il faut lancer deux fois la pièce de monnaie pour obtenir « pile ».
2. Le fait de lire la face d'un dé équilibré que l'on jette plusieurs fois est analogue au fait de lire le numéro d'une boule que l'on prélèverait d'une urne en contenant six (et qui seraient numérotées de 1 à 6) pour l'y replacer ensuite. Compte-tenu de la question précédente, puisque l'espérance de X vaut n, alors, en moyenne, il faut lancer six fois le dé équilibré pour obtenir un six.

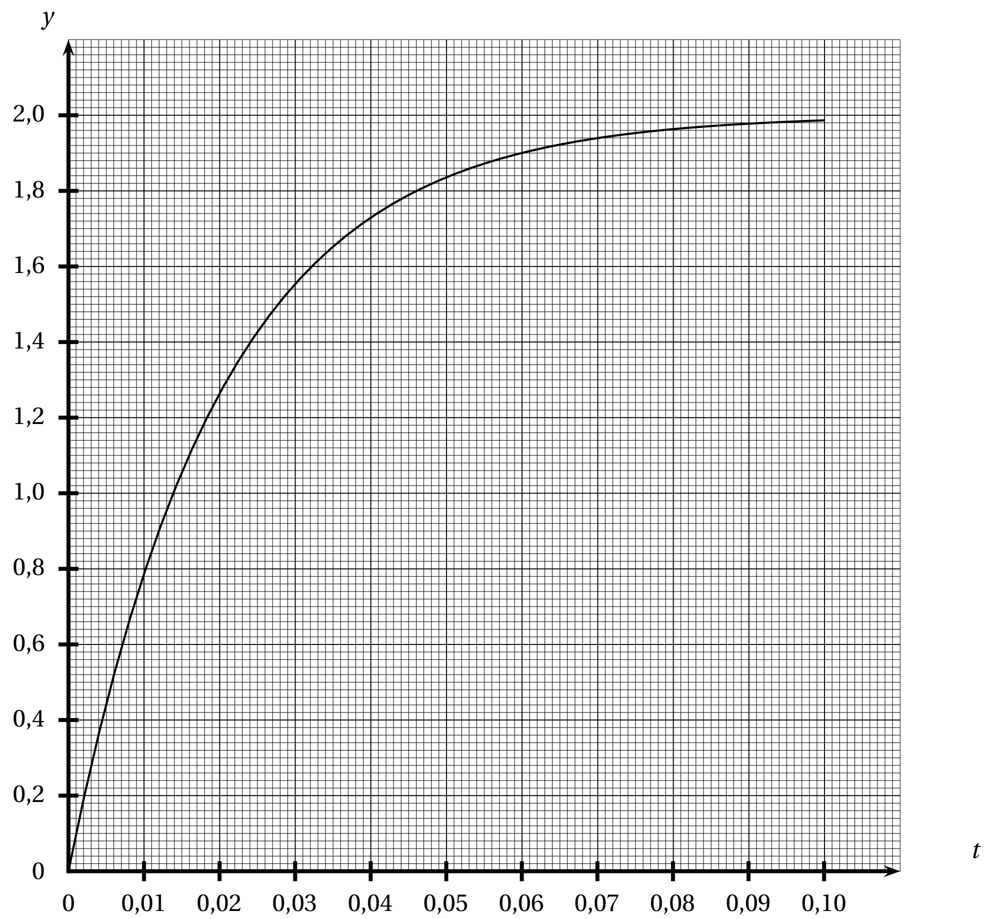
Exercice 3 Question 1. a.

Corrigé	Savoir-faire évalués
Partie II **1.** $f(t) = 2\left(1-\mathrm{e}^{-50t}\right) = 2-2\mathrm{e}^{-50t}$ donc $f'(t) = -2(-50)\mathrm{e}^{-50t}$ soit $f'(t) = 100\mathrm{e}^{-50t}$.	Dériver une somme de fonctions usuelles. Dériver le produit d'une fonction usuelle par une constante.
2. La fonction $t \longmapsto \mathrm{e}^{-50t}$ est strictement positive quelle que soit la valeur de t donc $f'(t) > 0$ pour tout t appartenant à l'intervalle $[0\,;\,0{,}1]$.	Connaître et utiliser les propriétés de la fonction exponentielle.
3. Tableau de variations de f en annexe 1.	Savoir appliquer l'étude du signe de la dérivée à l'étude du sens de variation d'une fonction.
4. Tableau de valeurs en annexe 1.	Calculer l'image d'un réel par une fonction numérique.
5. Tracé de la courbe $\mathscr{C}$ en annexe 1.	Construire la représentation graphique d'une fonction.
Partie III 1. et 2. en annexe 1. On obtient $\tau = 0{,}02$ s	Exploiter la représentation graphique d'une fonction.

ANNEXE 1

t	0		0,1
signe de $f'(t)$		+	
variation de la fonction f	0	$\nearrow$	1,99

t	0	0,005	0,010	0,030	0,040	0,060	0,080	0,100
$f(t)$	0	0,44	0,79	1,55	1,73	1,90	1,96	1,99



Question 1. b.
La question 1 de la partie II (« montrer que $f'(t) = 100\mathrm{e}^{-50t}$ ») peut poser problème. La fonction f étant sous une forme factorisée, les élèves peuvent être génés par la forme « produit d'un réel par une fonction ».

La question 4. a. de la partie III nécessite, pour sa résolution, l'utilisation de plusieurs propriétés opératoires sur le calcul intégral. La présence de deux étapes faisant appel à du calcul intégral peut poser problème.

La recherche de primitives dans la question 4. b. peut poser une difficulté pour les élèves.

Question 2

Pré requis

- Déterminer la fonction dérivée d'une fonction sur un intervalle en utilisant notamment le formulaire d'examen.
- Étudier une fonction numérique : déterminer son sens de variation à partir du signe de la dérivée ; tracer sa courbe représentative à partir d'un tableau de valeurs et du tracé d'éventuelles tangentes à la courbe en des points particuliers.
- Calculer l'aire d'une figure usuelle.

Exemple d'organisation de la séquence et d'activités d'introduction

- Activité d'introduction à la notion de primitive d'une fonction :
  - Demander aux élèves de dériver trois fonctions numériques dont les expressions sont égales à une constante près.

  - Leur faire remarquer que les fonctions dérivées sont égales.
- Introduire alors la notion de primitive à partir de cette activité. Leur rappeler l'unicité de la fonction dérivée d'une fonction donnée et leur faire constater la multiplicité des primitives d'une fonction donnée.
- Faire rechercher aux élèves quelques exemples de primitives de fonctions données par lecture inverse du tableau des dérivées. Les exemples seront choisis par ordre de difficulté croissante.
- Activité d'introduction à la notion d'intégrale sur un intervalle d'une fonction f admettant une primitive F.
  - Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\,;\,3]$ par $f(x) = -x+5$. On note $\mathcal{D}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère orthonormal d'unités graphiques 1 cm. L'objectif est de déterminer l'aire $\mathcal{A}$ de la surface comprise entre la courbe $\mathcal{D}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = 3$.
  - 1re étape : faire apparaître cette surface à l'aide d'une calculatrice graphique (programmation de la fonction et des paramètres, visualisation), puis faire estimer cette aire (en unités d'aire).
  - 2e étape : représentation graphique de la fonction. Faire reconnaître la figure géométrique (trapèze), calculer l'aire du trapèze et vérifier en comptant les « aires unitaires ».
  - 3e étape : faire déterminer une primitive F de la fonction f. Faire calculer $F(3) - F(1)$ et comparer avec le résultat de l'étape 2.
  - 4e étape : faire émettre une conjecture concernant le calcul de l'aire de la surface comprise entre la courbe $\mathcal{D}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = 1$ et $x = b$.
  - 5e étape : faire contrôler la vraisemblance de cette conjecture en l'utilisant pour prévoir le résultat pour différentes valeurs de b puis en effectuant le calcul â l'aide d'une calculatrice ou d'un logiciel approprié.
- Introduire alors la notion d'intégrale, les notations $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $F(b) - F(a)$ et le vocabulaire spécifique à partir de l'activité précédente.
  Préciser l'interprétation géométrique de l'intégrale à l'aide d'une aire dans le cas de fonctions positives.
- Applications (par exemple activité similaire à celle d'introduction à l'aide d'une fonction du second degré).
- Propriétés du calcul intégral : mise en évidence de la relation de Chasles et de la linéarité de l'intégrale à partir d'activités utilisant une interprétation géométrique.
- Le problème traité serait donné, avec la question supplémentaire (en partie III) ci-dessous, pour une évaluation finale de la séquence.
  Montrer que l'aire de la surface délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et la droite d'équation $t = 0,1$ est égale à l'aire du rectangle délimité par l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées, la droite d'équation $t = 0,1$ et la droite d'équation $y = I_{\text{moy}}$.

Exercice 4

Partie I

1. On a clairement $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longmapsto} 0$, donc la courbe $\mathcal{C}$ admet l'axe des abscisses pour asymptote en $+\infty$.
   La limite de f en $-\infty$ est une forme indéterminée mais on a, pour $x \neq 0$:

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{-x}\left(1-\mathrm{e}^{-x}\right)}{x} = \frac{1-\mathrm{e}^{-x}}{x\mathrm{e}^{x}}$$

et comme $xe^x \underset{x\to-\infty}{\longmapsto} 0$, alors $f(x) \underset{x\to-\infty}{\longmapsto} -\infty$.

2. Puisque les fonctions $x \longmapsto e^{-x} - 1$ et $x \longmapsto \dfrac{1}{x}$ sont continues sur $\mathbb{R}*$, f l'est aussi en tant que produit de fonctions continues.
De plus, on a, pour $x \neq 0$

$$f(x) = \frac{e^{-x}-1}{x} = \frac{1+(-x)+(-x)\tau(-x)-1}{x} \text{ avec } \tau(x) \underset{x\to 0}{\longmapsto} 0.$$

Ainsi $f(x) = -1 - \tau(-x) \underset{x\to 0}{\longmapsto} -1 = f(0)$ ce qui assure que f est continue en 0. Au final, f est donc continue sur $\mathbb{R}$.

3. **a.** En utilisant le développement limité d'ordre 2 de la fonction exponentielle en 0, on a, pour tout $x \neq 0$:

$$\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\frac{e^{-x}-1}{x}+1}{x} = \frac{e^{-x}-1+x}{x^2} = \frac{1+(-x)+\frac{(-x)^2}{2}+(-x)^2\tau(-x)-1+x}{x^2}$$

avec $\tau(x) \underset{x\to 0}{\longmapsto} -0$.
Ainsi, on a $\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \dfrac{1}{2} + \tau(-x) \underset{x\to 0}{\longmapsto} \dfrac{1}{2}$ ce qui assure que f est dérivable en 0 et que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$.
On en déduit donc que la courbe $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 0 une tangente de pente $\dfrac{1}{2}$.

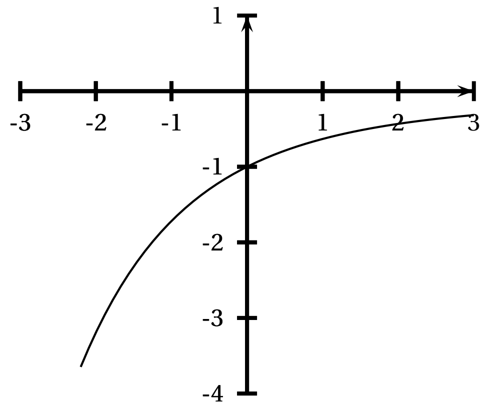
b. f est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}*$, donc f est dérivable sur $\mathbb{R}*$ et on obtient que, pour tout $x \neq 0$, :

$$f'(x) = \frac{-xe^{-x}-(e^{-x}-1)}{x^2}.$$

4. **a.** g est clairement dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée vaut $g'(x) = xe^{-x}$ qui est du signe de x. Ainsi, g est strictement décroissante sur $]-\infty\,;\,0[$ et g est strictement croissante sur $]0\,;\,+\infty[$. g est donc minimale en $x = 0$ et comme $g(0) = 0$, alors g est strictement positive sur $\mathbb{R}*$ et est nulle en 0.

b. Puisque, pour $x \neq 0$, on a $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$, on déduit de la question précédente que $f'(x) > 0$ pour $x \neq 0$. Comme de plus, on a obtenu que $f'(0) = \dfrac{1}{2}$, alors $f' > 0$ sur $\mathbb{R}$ et donc f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

5. On obtient approximativement la courbe suivante :

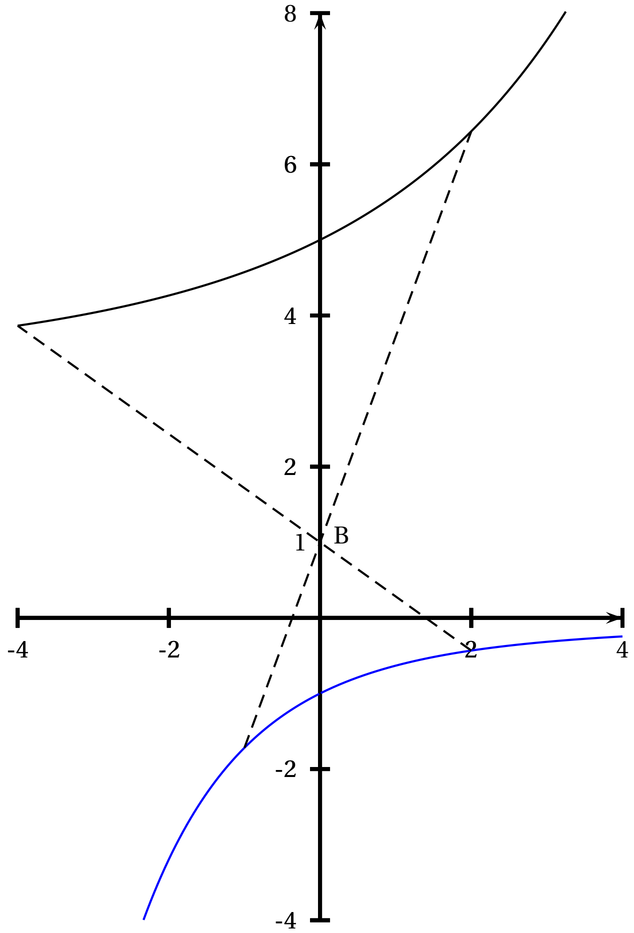


Partie II

1. Le fait que $M(z)$ est invariant par s se traduit par le fait que $s(M) = M$ soit par $-2z+3\mathrm{i} = z$ soit $z = \mathrm{i}$. Ainsi s admet un seul point invariant qui est le point B d'affixe i, autrement dit le point de coordonnées $(0\,;\,1)$.
On a alors $z' - \mathrm{i} = -2z + 2\mathrm{i} = -2(z-\mathrm{i})$ *i. e.* $\overrightarrow{\mathrm{B}s(M)} = -2\overrightarrow{\mathrm{B}M}$ ce qui signifie que s est l'homothétie de centre B de rapport -2.

2. On a donc $x'+\mathrm{i}y' = -2(x+\mathrm{i}y)+3\mathrm{i}$ d'où $\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & -2x \\ y' & = & -2y+3 \end{array}\right.$ soit $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & -\dfrac{x'}{2} \\ y & = & \dfrac{3}{2} - \dfrac{y'}{2} \end{array}\right.$

3. On obtient approximativement la courbe suivante :



4. Si on note $M(x\,;\,f(x))$ un point de la courbe $\mathscr{C}$ et $M'(x'\,;\,y')$ son image par s, on a, si $x \neq 0$:

$$y' = -2y+3 = -2f(x)+3 = -2\frac{\mathrm{e}^{-x}-1}{x} + 3 = -2\frac{\mathrm{e}^{\frac{x'}{2}}-1}{-\frac{x'}{2}} + 3 = 4\frac{\mathrm{e}^{\frac{x'}{2}}-1}{x'} + 3$$

et si $x = 0$, on obtient que $y' = -2y+3 = -2f(0)+3 = 5$. Si on considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $\left\{\begin{array}{lcl} h(x) & = & 4\dfrac{\mathrm{e}^{\frac{x}{2}}-1}{x} + 3 \text{ si } x \neq 0 \\ h(0) & = & 5 \end{array}\right.$, alors la courbe $\mathscr{C}'$ est bien la courbe représentative de la fonction h.

Partie III

1. On a $[\int_a^b \left[f_1(t)+\lambda f_2(t)\right]^2 \mathrm{d}t = \int_a^b \left[f_1^2(t)+2\lambda f_1(t)f_2(t)+\lambda^2 f_2^2(t)\right]^2 \mathrm{d}t = \alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma$ où $\alpha = \int_a^b f_2^2(t)$, $\beta = 2\int_a^b f_1(t)f_2(t)\mathrm{d}t$ et $\gamma = \int_a^b f_1^2(t)\mathrm{d}t.Puisquelafonction\left[f_1(t)+\lambda f_2(t)\right]^2$ est continue positive sur l'intervalle $[a~;~b]$ et que $a<b$, on sait que $\int_a^b \left[f_1(t)+\lambda f_2(t)\right]^2 \mathrm{d}t \geqslant 0$ et ceci pour tout réel λ. Ainsi, on a $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma \geqslant 0$ pour tout réel λ. Nous allons distinguer deux cas de figure :

- si $\alpha = 0$, on a donc $\beta\lambda+\gamma \geqslant 0$ pour tout réel λ ce qui n'est possible que si $\beta = 0$ (penser à la représentation graphique de $\lambda \longmapsto \beta\lambda+\gamma$ qui est un droite de pente β et qui doit être toujours au dessus de l'axe des abscisses). L'inégalité de Schwarz s'écrit alors $\beta^2 \leqslant \gamma\alpha$ soit $0 \leqslant 0$ ce qui ne pose donc aucun souci.
- si $\alpha \neq 0$, comme α est l'intégrale d'une fonction positive continue sur l'intervalle $[a~;~b]$, on sait donc que $\alpha > 0$. Dans ce cas, puisque $\alpha\lambda^2+\beta\lambda+\gamma \geqslant 0$ pour tout réel λ, le polynôme P défini par $P(x) = \alpha x^2+\beta x+\gamma$ est donc un polynôme du second degré à coefficients réels qui se doit de garder un signe constant sur $\mathbb{R}$. Son discriminant ne saurait donc être strictement positif (sinon le polynôme admet deux racines réelles distinctes et change de ce fait de signe sur $\mathbb{R}$). Or ce discriminant vaut

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$$

et on constate alors que

$$\Delta \leqslant 0 \iff \beta^2 \leqslant 4\alpha\gamma \iff 4\left(\int_a^b f_1(t)f_2(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leqslant 54\left(\int_a^b f_1^2(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b f_2^2(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

On aboutit ainsi à l'inégalité de Schwarz.

Si on pose $f_1(t) = \mathrm{e}^{-t}-1$et $f_2(t) = \dfrac{1}{t}$, les fonctions f_1 et f_2 sont continues sur l'intervalle $[1~;5]$. On peut donc appliquer l'inégalité de Schwarz tout en sachant que :

$$\int_1^5 f_1(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_1^5 \left(\mathrm{e}^{-t}-1\right) = \int_1^5 \left(\mathrm{e}^{-2t}-2\mathrm{e}^{-t}+1\right)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\mathrm{e}^{-2t}}{-2}+2\mathrm{e}^{-t}+t\right]_1^5 =$$

$$-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-10}+2\mathrm{e}^{-5}+5-\left(-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}+2\mathrm{e}^{-1}+1\right) = \frac{1}{2}\left(-\mathrm{e}^{-10}+4\mathrm{e}^{-5}+8+\mathrm{e}^{-2}-4\mathrm{e}^{-1}\right)$$

$$\int_1^5 f_2(t)^2\,\mathrm{d}t = \int_1^5 \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{t}\right]_1^5 = -\frac{1}{5}+1 = \frac{4}{5}.$$

On obtient donc ainsi que

$$\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{2}{5}\left(-\mathrm{e}^{-10}+4\mathrm{e}^{-5}+8+\mathrm{e}^{-2}-4\mathrm{e}^{-1}\right)$$

On sait que l'aire $\mathscr{A}$, exprimée en centimètres carrés, du domaine compris entre la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x=1$ et $x=5$ est

$$\mathscr{A} = 4\left(-\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x\right)$$

puisque f est négative sur l'intervalle $[1~;5]$ et puisque l'unité graphique est de deux centimètres. On a donc
$\mathscr{A} = 4\left|\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x\right| = 4\sqrt{\left[\int_1^5 f(x)\,\mathrm{d}x\right]^2} \leqslant 4\sqrt{\frac{2}{5}\left(-\mathrm{e}^{-10}+4\mathrm{e}^{-5}+8+\mathrm{e}^{-2}-4\mathrm{e}^{-1}\right)}$On obtient grâce à une calculatrice que

$$4\sqrt{25\left(-\mathrm{e}^{-10}+4\mathrm{e}^{-5}+8+\mathrm{e}^{-2}-4\mathrm{e}^{-1}\right)} \approx 6,5437 \text{ à}$$

10^{-4} près.
Ainsi l'aire demandée est bien inférieure à 6,55