∽ Corrigé du Brevet de technicien supérieur ∾ session 2010 Géomètre topographe

Exercice 1 **8 points**

Partie A

1. Soit t un réel quelconque. On a :
$x(t+2\pi) = t+2\pi-\sqrt{2}\sin(t+2\pi) = t+2\pi-\sqrt{2}\sin(t)$ car sin est 2π–périodique.
Donc $x(t+2\pi) = x(t)+2\pi$. Par ailleurs,
$y(t+2\pi) = \cos(t+2\pi) = \cos(t)$ car cos est 2π–périodique.
Donc $y(t+2\pi) = y(t)$.
Le vecteur $\overrightarrow{M_tM_{t+2\pi}}$ a donc pour coordonnées
$\begin{pmatrix} x(t+2\pi)-x(t) \\ y(t+2\pi)-y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t)+2\pi-x(t) \\ y(t)-y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\pi \\ 0 \end{pmatrix}$, ce vecteur est donc constant.
Le point $M_{t+2\pi}$ s'obtient donc à partir de M_t par une translation de vecteur $2\pi\,\overrightarrow{\imath}$.
La courbe $\mathscr{C}$ est donc invariante par cette translation.
2. Soit t un réel quelconque. Alors :
$x(-t) = (-t)-\sqrt{2}\sin(-t) = -t+\sqrt{2}\sin t$ car sin est impaire.
Donc $x(-t) = -x(t)$: la fonction x est impaire. Par ailleurs,
$y(-t) = \cos(-t) = \cos(t)$ car cos est paire. Donc $y(-t) = y(t)$.
Le point M_{-t} s'obtient donc à partir de M_t par une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.
3. D'après la question 1., il suffit de construire un morceau de la courbe pour des valeurs de t comprises dans un intervalle de longueur 2π puis de translater ce morceau de vecteurs $k.2\pi\,\overrightarrow{\imath}$ pour obtenir la courbe entière. L'intervalle peut donc être réduit à $[-\pi\,;\,\pi]$.
Enfin, les parités de x et de y permettent de réduire l'intervalle d'étude à $[0\,;\,\pi]$.
4. Tout d'abord on construit le symétrique de $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$ par rapport à l'axe des ordonnées pour obtenir une courbe $\mathscr{C}_{\mathscr{J}'}$. Ensuite on translate la réunion de $\mathscr{C}_{\mathscr{J}}$ et de $\mathscr{C}_{\mathscr{J}'}$ par des translations de vecteurs $k.2\pi\,\overrightarrow{\imath}$ pour obtenir la courbe entière.

Partie B

1. **a.** Pour tout $t \in [0\,;\,\pi]$: $x'(t) = 1-\sqrt{2}\cos(t)$ donc
$$x'(t) > 0 \iff 1-\sqrt{2}\cos(t) > 0 \iff \cos(t) < \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\iff \cos(t) < \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \iff t > \frac{\pi}{4}.$$
car la fonction cosinus est décroissante sur J.
Ainsi, $x'(t) > 0$ sur $\left]\frac{\pi}{4}\,;\,\pi\right]$ et, de même, $x'(t) < 0$ sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right[$ et $x'(t) = 0$ si $t = \frac{\pi}{4}$.
b. Pour tout $t \in [0\,;\,\pi]$: $y'(t) = -\sin(t)$ donc $y'(t) < 0$ sur $]0\,;\,\pi[$ et $y'(t) = 0$ si $t = 0$ ou $t = \pi$.

c. Le signe de la dérivée donne les variations de la fonction.

x est strictement décroissante sur $\left[0\,;\,\frac{\pi}{4}\right]$ et strictement croissante sur $\left[\frac{\pi}{4}\,;\,\pi\right]$.

y est strictement décroissante sur $[0\,;\,\pi]$.

t	0		$\frac{\pi}{4}$		π
$x'(t)$	$1-\sqrt{2}$		0		$1+\sqrt{2}$
$x(t)$	0	$\searrow$	$\frac{\pi}{4}-1$	$\nearrow$	π
$y(t)$	1		$\searrow$		0
$y'(t)$	0		$-$		0

2. a. Il s'agit d'abord de voir à quel moment x' et y' s'annulent (pas simultanément de préférence).

L'étude faite aux questions b. et c. montre alors que :

– la courbe C_J admet une tangente parallèle à l'axe des abscisses quand $x'(t) \neq 0$ et $y'(t) = 0$ donc quand $t = 0$ (point $M_0(0;1)$) ou $t = \pi$ (point $M_\pi(\pi\,;-1)$).

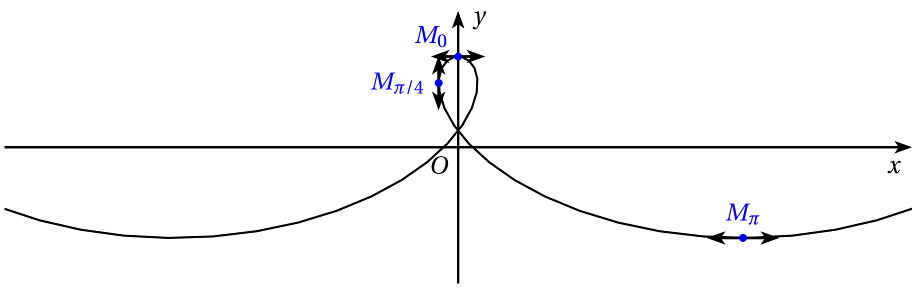
– la courbe C_J admet une tangente parallèle à l'axe des ordonnées quand $x'(t) = 0$ et $y'(t) \neq 0$ donc quand $t = \frac{\pi}{4}$ (point $M_{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{\pi}{4} - 1\,;\,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$).

b. C_J coupe l'axe des abscisses au point M_t tel que $y(t) = 0$ donc $\cos(t) = 0$ ce qui donne $t = \frac{\pi}{2}$ (ici, $t \in J$). Le point a alors pour coordonnées $\left(\frac{\pi}{2} - \sqrt{2}\,;0\right)$.

3. a.

t	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$x(t)$	0	$-0,21$	$-0,18$	$0,16$	$3,14$
$y(t)$	1	$0,71$	$0,5$	0	-1

b. Par souci d'économie de place, l'échelle choisie dans l'énoncé n'a pas été respectée.



Exercice 1 **8 points**

Partie A

1. L'angle $\widehat{I}$ est l'angle entre les tangentes aux arcs $\widehat{IA}$ et $\widehat{IB}$.
   $\theta_I = \theta_A$ donc $\widehat{IA}$ est un arc de méridien tandis que $\widehat{IB}$ est un arc de l'équateur ; les deux étant perpendiculaires, on a bien $\widehat{I} = \dfrac{\pi}{2}$.
   Comme $\widehat{IA}$ est un arc de méridien, on a $b = \widehat{AI} = |\varphi_I - \varphi_A| = \dfrac{\pi}{4}$.
2. $\cos\widehat{B} = -\cos\widehat{A}\cos\widehat{I} + \sin\widehat{A}\sin\widehat{I}\cos b = 0 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times 1 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc $\widehat{B} = \dfrac{\pi}{3}$.
3. $\cos\widehat{A} = -\cos\widehat{B}\cos\widehat{I} + \sin\widehat{B}\sin\widehat{I}\cos a$ donc $\dfrac{\sqrt{2}}{2} = 0 + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times 1 \times \cos a$ donc $\cos a = \dfrac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{3}/2} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$.
4. Nous savons que $a = \widehat{BI} = \widehat{IOB}$ (en radians) car le rayon de la sphère est 1. Donc $a = \theta_B$ et, par ailleurs, $\varphi_B = 0$. Pour tout point $M(x\ ;\ y\ ;\ z)$ de Σ : $x = 1\cos\theta\cos\varphi$; $y = 1\sin\theta\cos\varphi$; $z = 1\sin\varphi$. $x_B = \cos a \cos 0 = \sqrt{\dfrac{2}{3}}$; $y_B = \sin a \cos 0 = \sin a$; $z_B = \sin 0 = 0$.
   Comme $\cos^2 a + \sin^2 a = 1$, on a $\sin a = \pm\sqrt{1 - \cos^2 a}$.
   Comme ici, B a une longitude a négative, on obtient
   $z_B = \sin a = -\sqrt{1 - \dfrac{2}{3}} = -\sqrt{\dfrac{1}{3}} = -\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Partie B

1. **a.** $x_A = 1\cos 0 \cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; $y_A = 1\sin 0\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = 0$; $z_A = 1\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
   b. $\overrightarrow{SN}$ a pour coordonnées (0 ; 0 ; 2) donc $SN^2 = 4$ d'où
   $\overrightarrow{SN'} = \dfrac{2}{4}\overrightarrow{SN} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SN}$.
   Les coordonnées de $\overrightarrow{SN'} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{SN}$ sont 0 ; 0 ; 1) ce qui donne
   $x' - x_S = 0$ donc $x' = 0$; $y' - y_S = 0$ donc $y' = 0$ et $z' - z_S = 1$ donc $z' = 0$.
   $\boxed{\text{Le point } N' \text{ est donc } O}$.
   c. Le pôle S est sur la sphère Σ donc l'image de la sphère Σ est $\boxed{\text{un plan } (P)}$ perpendiculaire à la droite (SO), passant par l'image d'un point de la sphère (Σ) (par exemple celle de N).
   Le vecteur $\overrightarrow{SO}$ (0 ; 0 ; 1) est normal au plan (P) donc une équation de (P) s'écrit $0x + 0y + 1z + d = 0$ donc $z = \lambda$. Comme $N' = O$ appartient à (P), on en déduit que $\boxed{\text{l'équation de } (P) \text{ est } z = 0}$.
   d. Soit M un point de Γ et M' son image par $\mathcal{T}$. Alors :
   $SM^2 = SO^2 + OM^2 = 1^2 + 1^2 = 2$ donc $\overrightarrow{SM'} = \dfrac{2}{2}\overrightarrow{SM} = \overrightarrow{SM}$ donc $\boxed{M' = M}$.
2. $\overrightarrow{SA}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ ;\ 0\ ;\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2} + 1\right)$ donc

   $SA^2 = \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(1 - \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{1}{2} + 1 - 2 \times 1 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2 - \sqrt{2}$ d'où

$\overrightarrow{SA'} = \dfrac{2}{2-\sqrt{2}}\overrightarrow{SA}$

qui a pour coordonnées $\begin{pmatrix} \dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Remarquons que $\dfrac{\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}(2+\sqrt{2})}{2^2-(\sqrt{2})^2} = \dfrac{2\sqrt{2}+2}{2} = 1+\sqrt{2}$.

Donc $x' - x_S = 1+\sqrt{2}$ donc $x' = 1+\sqrt{2}$; $y' - y_S = 0$ donc $y' = 0$ et $z' - z_S = 1$ donc $z' = 0$.

$\boxed{\text{Le point } A' \text{ a pour coordonnées } \left(1+\sqrt{2}\ ;\ 0\ ;\ 0\right)}$.

3. Γ_1 est un méridien (car $\theta_I = \theta_A$) donc passe par les pôles de la sphère donc par le pôle S de l'inversion $\mathscr{T}$ (et on travaille dans le plan (OIS)). Γ_1' est donc une droite.

– Γ_1 est contenu dans Σ donc Γ_1' est contenue dans (P).

– Γ_1 est contenu dans (OIS) donc Γ_1' aussi ((OIS) passe par le pôle).

Donc Γ_1' est l'intersection des plans (P) et (OIS) donc $\boxed{\Gamma_1' = (OI)}$.

4. Γ_2 est l'intersection de Σ et du plan (OAB).

– Le plan (OAB) ne passe pas par S (sinon on aurait $B \in (OAS)$ donc $\theta_B = 0$) donc son image est une sphère.

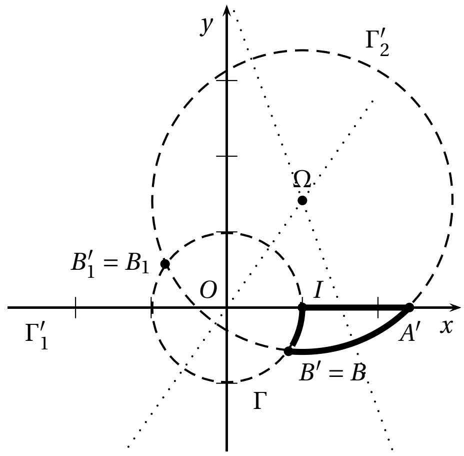
– La sphère Σ devient le plan (P).

Donc Γ_2' est l'intersection d'une sphère et d'un plan, qui ont au moins deux points communs (A' et B') donc $\boxed{\Gamma_2' \text{ est un cercle}}$.

5. Pour le tracé de Γ_2', il nous faut trois points. Nous connaissons déjà A' et $B' = B$ (car $B \in \Gamma$). Il suffit de prendre le symétrique de B par rapport à O, qui est un point du cercle Γ_2 et qui est aussi un point de Γ donc $B_1' = B_1$.

Le centre de Γ_2' est l'intersection des médiatrices de $[BD]$ et de $[BA']$.

Pour information : l'équation réduite de la médiatrice de $[BA']$ est $y = (\sqrt{2} - \sqrt{3} - \sqrt{6})x + \sqrt{3} + \sqrt{6}$, celle de la médiatrice de $[BD]$ est $y = \sqrt{2}\,x$ et les coordonnées du centre de Γ_2' sont $\left(1\ ;\ \sqrt{2}\right)$.



En gras, l'image du triangle sphérique AIB.