Correction BTS Broupement B
Nouvelle Calédonie Novembre 2010

Exercice 1 (sur 12) :

A.

1. $y' - 3y = 0 \Leftrightarrow y' = 3y$
   $x \mapsto 3$ admet pour primitive $x \mapsto 3x$ donc les solutions sont de la forme $y = \lambda \mathrm{e}^{3x}$
2. $h(x) = -x\mathrm{e}^{3x}$, $h'(x) = -\mathrm{e}^{3x} - 3x\mathrm{e}^{3x}$
   $h'(x) - 3h(x) = -\mathrm{e}^{3x} - 3x\mathrm{e}^{3x} + 3x\mathrm{e}^{3x} = -\mathrm{e}^{3x}$
   Donc h est une solution particulière de (E).
3. Les solutions de l'équation différentielle (E) sont de la forme $y = \lambda\mathrm{e}^{3x} - x\mathrm{e}^{3x}$.
4. $f(0) = 1 \Leftrightarrow \lambda\mathrm{e}^{3\times 0} - x\mathrm{e}^{3\times 0} = 1 \Leftrightarrow \lambda - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$.
   Donc, $f(x) = \mathrm{e}^{3x} - x\mathrm{e}^{3x}$

B.

1. **a.** $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.
   b. Réponse *C*
2. **a.** $f'(x) = -\mathrm{e}^{3x} + 3(1-x)\mathrm{e}^{3x} = (3 - 3x - 1)\mathrm{e}^{3x} = (2 - 3x)\mathrm{e}^{3x}$.
   b. $f'(x) \geqslant 0 \Leftrightarrow (2-3x)\mathrm{e}^{3x} \geqslant 2 - 3x \geqslant 0 \Leftrightarrow 2 \geqslant 3x \Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \geqslant x$
   c.

x	$-\infty$		$\frac{2}{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{1}{3}\mathrm{e}^2$	$\searrow$	$-\infty$

3. **a.** $\mathrm{e}^{3x} = 1 + 3x + \dfrac{(3x)^2}{2} + x^2\epsilon(x) = 1 + 3x + \dfrac{(9x^2}{2} + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$
   b. $f(x) = (1-x)\left(1 + 3x + \dfrac{(9x^2}{2}\right) + x^2\epsilon_1(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon_1(x) = 0$
   Donc, $f(x) = 1 + 3x + \dfrac{(9x^2}{2} - x - 3x^2 + x^2\epsilon(x) = 1 + 2x + \dfrac{3}{2}x^2 + x^2\epsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x\to 0}\epsilon(x) = 0$
   c. Réponse *B*
   d. Réponse *B*

C.

1. **a.** $I = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1}(1-x)\mathrm{e}^{3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{(1-x)\mathrm{e}^{3x}}{3}\right]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{3x}}{3}\,\mathrm{d}x = 0 - 2\mathrm{e}^{-3} + \left[\frac{\mathrm{e}^{3x}}{9}\right]_{-1}^{1}$
   $= -2\mathrm{e}^{-3} + \dfrac{\mathrm{e}^{3}}{9} - \dfrac{\mathrm{e}^{-3}}{9} = \dfrac{\mathrm{e}^{3} - 7\mathrm{e}^{-3}}{9}$.
   b. $I \approx 2,19$.
2. **a.** $f(x) \geqslant 0$ pour x dans l'intervalle $[-1\ ;\ 1]$.
   b. I est l'aire, exprimée en unités d'aire, de la partie du plan compris entre l'axe des abscisses et la courbe d'une part, les droites d'équations $x = -1$ et $x = 1$.

Exercice 2 (sur 8) :*A.*

1. X est la somme des résultats de 50 expériences indépendantes à deux issues possibles, l'issue favorable ayant une probabilité de $0,02$. X suit donc une loi binomiale de paramètre $n = 50$, $p = 0,02$ et $q = 0,98$.
2. $P(X=0) = C_{50}^{0} \times 0,02^{0} \times 0,98^{50} \approx 0,36$ $P(X=1) = C_{50}^{1} \times 0,02^{1} \times 0,98^{49} \approx 0,37$.
3. La probabilité qu'au plus deux plaques soient défectueuses est :
   $P(X \leq 2) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$
   $= C_{50}^{0} \times 0,02^{0} \times 0,98^{50} + C_{50}^{1} \times 0,02^{1} \times 0,98^{49} + C_{50}^{2} \times 0,02^{2} \times 0,98^{48} \approx 0,92$

B.

1. L_1 suit la loi $\mathcal{N}(550;1)$ donc $T_1 = \dfrac{L_1 - 550}{1} = L_1 - 550$ suit la loi $\mathcal{N}(0;1)$. Donc,
$P(548 \leqslant L_1 \leqslant 552) = P(548 - 550 \leqslant L_1 - 550 \leqslant 552 - 550) = P(-2 \leqslant T_1 - 550 \leqslant 2) = \Pi(2) - \Pi(-2) = \Pi(2) - (1 - \Pi(2)) = 2 \times \Pi(2) - 1 =$
$2 \times 0,9772 - 1 \approx 0,95$

2. La probabilité que la plaque soit conforme est : $P((548 \leqslant L_1 \leqslant 552 \cap (108 \leqslant L_2 \leqslant 112)) =$
$P(548 \leqslant L_1 \leqslant 552) \times P(108 \leqslant L_2 \leqslant 112)$ (L_1 et L_2 sont indépendantes)
$0,95 \times 0,95 \approx 0,90$

C.

1. Une estimation ponctuelle de la fréquence inconnue est $p = \dfrac{94}{100} = 0,94$.

2. On pose t tel que $\Pi(t) = \dfrac{1 + 0,95}{2} = 0,975$. D'après le formulaire, $t = 1,96$.
On pose $h = t \times \sqrt{\dfrac{p(1-p)}{100}} = 1,96 \times \sqrt{\dfrac{0,94(1-0,94)}{100}} \approx 0,05$
Un intervalle de confiance de la fréquence p avec le coefficient de confiance 95 % est :
$[0,94 - 0,05 \ ; \ 0,94 + 0,05] = [0,89 \ ; \ 0,99]$