# Corection BTS A Métropole - 2005

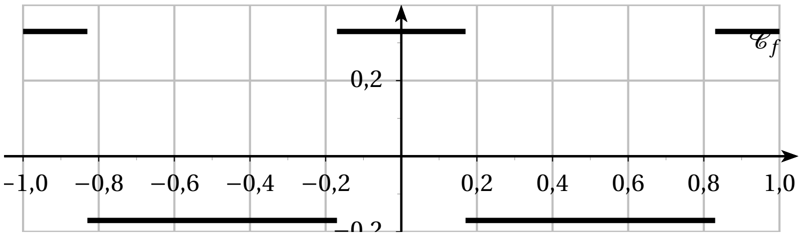
***Exercice 1 (sur 9) :***

**1.** **a.** $g'(t) = -2\cos t \sin t \times \sin^2 t + (1+\cos^2 t) \times 2\cos t \sin t = 2\cos t \sin t(-\sin^2 t + 1 + \cos^2 t)$
$= 2\cos t \sin t \times 2\cos^2 t = 4\sin t \cos^3 t$.

**b.** $\cos^3 t$ et $\cos t$ sont de même signe donc :

| $t$ | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ | | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $4\sin t$ | $0$ | $+$ | | $+$ | $0$ |
| $\cos^3 t$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g'(t)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $g(t)$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ | $\searrow$ | $0$ |

**2.** **a.**




**b.** $f$ est paire donc :

- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $b_n = 0$
- $a_0 = \dfrac{2}{1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)dt = 2\int_0^{\tau} \frac{1}{2} - \tau dt + 2\int_{\tau}^{\frac{1}{2}} -\tau dt = 2\tau\left(\frac{1}{2}-\tau\right) - 2\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\tau = 0$
- soit $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = \dfrac{4}{1}\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} f(t)\cos\left(2\frac{2\pi}{1}t\right)dt = 4\int_0^{\tau}\left(\frac{1}{2}-\tau\right)\cos(2n\pi t)dt + 4\int_{\tau}^{\frac{1}{2}} -\tau\cos(2n\pi t)dt$

$= 4\left[\left(\dfrac{1}{2}-\tau\right)\dfrac{\sin(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_0^{\tau} - 4\left[\tau\dfrac{\sin(2n\pi t)}{2n\pi}\right]_{\tau}^{\frac{1}{2}} = 4\left(\dfrac{1}{2}-\tau\right)\dfrac{\sin(2n\pi\tau)}{2n\pi} - 0 - 0 + 4\tau\dfrac{\sin(2n\pi\tau)}{2n\pi}$

$= 4 \times \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sin(2n\pi\tau)}{2n\pi} = \dfrac{\sin(2n\pi\tau)}{n\pi}$

Ainsi, $S(t) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n\pi}\sin(2n\pi\tau)\cos(2n\pi t)$

**3.** **a.** D'après la formule de Parseval, $E_h^2 = \dfrac{\left(\frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\right)^2 + \left(\frac{1}{2\pi}\sin(4\pi\tau)\right)^2}{2}$

$= \dfrac{\left(\frac{1}{\pi}\sin(2\pi\tau)\right)^2 + \left(\frac{2}{2\pi}\sin(2\pi\tau)\cos(2\pi\tau)\right)^2}{2} = \dfrac{\sin^2(2\pi\tau) + \sin^2(2\pi\tau)\cos^2(2\pi\tau)}{2\pi^2}$

$= \dfrac{(1+\cos^2(2\pi\tau))\sin^2(2\pi\tau)}{2\pi^2}$.

**b.** Ainsi $E_h^2 = \dfrac{1}{2\pi^2} \times [(1+\cos^2(2\pi\tau))\sin^2(2\pi\tau)] = \dfrac{1}{2\pi^2}\, g(2\pi\tau)$.

**4.** Par conséquent, d'après **1.**, $E_h^2$ est maximal quand $2\pi\tau = \dfrac{\pi}{2} \iff \tau = \dfrac{1}{4}$

***Exercice 2 (sur 11) :*** **Partie A :**

**1.** **a.** On pose $(H)$ : $\dfrac{1}{200}y'(t) + y(t) = 0 \iff y'(t) = -200y(t)$

Les solutions de $(H)$ sont de la forme $y(t) = \lambda e^{-200t}$.

Soit $g$ une solution constante de (1). On a $g'(t) = 0$ et $\dfrac{1}{200} \times 0 + g(t) = 146 \iff g(t) = 146$

Ainsi les solutions de (1) sont de la forme $y(t) = 146 + \lambda e^{-200t}$.

**b.** $\omega(0) = 150 \iff 146 + \lambda e^{-200\times 0} = 150 \iff 146 + \lambda = 150 \iff \lambda = 4$

Ainsi $\omega(t) = 146 + 4e^{-200t}$ pour tout $t \in [0\,;\,+\infty[$.

**2.** **a.** $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} e^{-200t} = 0$ donc $\omega_\infty = \displaystyle\lim_{t\to+\infty}\omega(t) = 146$.

Ainsi, $\omega(0) - \omega_\infty = 150 - 146 = 4$ rad/s.

**b.** $\left|\dfrac{\omega(t)-\omega_\infty}{\omega_\infty}\right| = 0{,}01 \iff \left|\dfrac{146+4e^{-200t}-146}{146}\right| = 0{,}01 \iff 4e^{-200t} = 1{,}46$

$\iff e^{-200t} = 0{,}365 \iff -200t = \ln(0{,}365) \iff t = -\dfrac{\ln(0{,}365)}{200} \approx 0{,}005$

## Partie B :

**1.** **a.** Voir **3.d.** SVP.

**b.** $\Gamma(p) = \mathscr{L}(K[U(t) - U(t-\tau)]) = \dfrac{K}{p} - \dfrac{K\mathrm{e}^{-\tau p}}{p}$

**2.** $Lp\left(\dfrac{1}{200}f'(t) + f(t)\right) = \mathscr{L}(\gamma(t)) \iff \dfrac{1}{200}(pF(p) - f(0^+)) + F(p) = \Gamma(p)$

$\iff \left(\dfrac{p}{200} + 1\right)F(p) = \Gamma(p) \iff \dfrac{p+200}{200}F(p) = \dfrac{K}{p} - \dfrac{K\mathrm{e}^{-\tau p}}{p} \iff F(p) = \dfrac{200K}{p(p+200)} - \dfrac{200K\mathrm{e}^{-\tau p}}{p(p+200)}$

**3.** **a.** $\dfrac{200}{p(p+200)} = \dfrac{a}{p} + \dfrac{b}{p+200} \iff 200 = a(p+200) + bp \iff 200 = (a+b)p + 200a$

$\iff \left\{\begin{array}{rcl} a+b & = & 0 \\ 200a & = & 200 \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} a & = & 1 \\ b & = & -1 \end{array}\right.$

Ainsi, $\dfrac{200}{p(p+200)} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+200}$

**b.** $f(t) = \mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{200K}{p(p+200)} - \dfrac{200K\mathrm{e}^{-\tau p}}{p(p+200)}\right) = K\mathscr{L}^{-1}\left(\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p+200} - \dfrac{\mathrm{e}^{-\tau p}}{p} + \dfrac{\mathrm{e}^{-\tau p}}{p+200}\right)$

$= K\left(\mathscr{U}(t) - \mathrm{e}^{-200t}\mathscr{U}(t) - \mathscr{U}(t-\tau) + \mathrm{e}^{-200(t-\tau)}\mathscr{U}(t-\tau)\right)$.

Ainsi, sur $[0\,;\,\tau[$, $f(t) = K\left(1 - \mathrm{e}^{-200t} \times 1 - 0 + \mathrm{e}^{-200(t-\tau)} \times 0\right) = K(1 - \mathrm{e}^{-200t})$

et sur $[\tau\,;\,+\infty[$, $f(t) = K\left(1 - \mathrm{e}^{-200t} - 1 + \mathrm{e}^{-200(t-\tau)}\right) = K\left(-\mathrm{e}^{-200t} + \mathrm{e}^{-200t+200\tau}\right)$

$= K(\mathrm{e}^{200\tau} - 1)\mathrm{e}^{-200t}$

**c.** Sur $[0\,;\,\tau[$, $f'(t) = 200K\mathrm{e}^{-200t} > 0$ donc $f$ est strictement croissante.

Sur $[\tau\,;\,+\infty[$, $f(t) = -200K(\mathrm{e}^{200\tau} - 1)\mathrm{e}^{-200t} < 0$ car $\tau \geqslant 0$ et $\mathrm{e}^{200\tau} - 1 \geq 0$. Ainsi $f$ est décroissante.

$f(0^+) = K(1 - \mathrm{e}^{-200\times 0}) = K(1-1) = 0$ et $f(\tau^-) = K(1 - \mathrm{e}^{-200\tau})$

$f(\tau^+) = K(\mathrm{e}^{200\tau} - 1)\mathrm{e}^{-200\tau} = K(1 - \mathrm{e}^{-200\tau})$ et comme $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-200t} = 0$, $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$

**d.**