Brevet de technicien supérieur session 2014
Comptabilité et gestion des organisations – Corrigé
Nouvelle–Calédonie

Durée : 2 heures

Exercice 1 **9 points**

Partie A

1. Les défauts 1 et 2 sont deux évènements indépendants l'un de l'autre. Il faut rechercher la probabilité suivante :
$p(A\cap B) = p(A) \times p(B)$
$p(A\cap B) = 0,02 \times 0,05 = 0,001$; $p(A\cap B) = 0,001$.
2. Il faut rechercher la probabilité suivante :
$p(A\cup B) = p(A) + p(B) - p(A\cap B)$;
$p(A\cup B) = 0,02 + 0,05 - 0,001 = 0,069$; $p(A\cup B) = 0,069$.
3. Il faut rechercher la probabilité suivante :
$p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = p\left(\overline{A}\right) \times p\left(\overline{B}\right)$ les évènements A et B sont indépendants donc les évènements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ le sont également :
$p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = (1-0,02)\times(1-0,05) = 0,98 \times 0,95 = 0,931$.
On peut aussi procéder ainsi :
$p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = 1 - p(A\cup B)$
$p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = 1 - p(A\cup B)$
$p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = 1 - 0,069 = 0,931$; $p\left(\overline{A}\cap\overline{B}\right) = 0,931$.

Partie B

1. **a.** Le prélèvement d'un composant est une expérience aléatoire à deux issues possibles :
   - succès : « le composant est conforme » avec une probabilité $p = 0,93$;
   - échec : « le composant n'est pas conforme » avec une probabilité
   $q = 1 - p = 0,07$.

   C'est une expérience de Bernoulli de paramètre $p = 0,93$.

   b. Le prélèvement de 100 composants au hasard de manière identique et indépendante est un schéma de Bernoulli de paramètres $n = 100$ et $p = 0,93$.

   c. La variable aléatoire X est associée au nombre de composants conformes parmi les 100 composants prélevés. La variable aléatoire X est donc associée au nombre de succès du schéma de Bernoulli.
   X suit la loi binomiale de paramètres $n = 100$ et $p = 0,93$ notée $\mathcal{B}(100\,;\,0,93)$.

   d. $\mathrm{E}(X) = n \times p$;
   $\mathrm{E}(X) = 100 \times 0,93 = 93$; $\mathrm{E}(X) = 93$.
   $\sigma(X) = \sqrt{n \times p \times (1-p)}$;
   $\sigma(X) = \sqrt{100 \times 0,93 \times 0,07} = \sqrt{6,51} \approx 2,6$; $\sigma(X) = 2,6$.
2. Il faut calculer la probabilité $p(F) = p(X = 100)$ à la calculatrice ou bien
$p(X = 100) = \binom{100}{100} \times 0,93^{100} \times 0,07^{0} = 0,93^{100} \approx 0,0007$; $p(X = 100) = 0,0007$.

3. Il faut calculer la probabilité $p(X \leqslant 98)$ (au moins 2 composants hors d'usage est équivalent à au plus 98 composants sont conformes)
   $p(X \leqslant 98) = 1 - p(X > 99) =$
   $1 - \binom{100}{99} \times 0,93^{99} \times 0,07^{1} - \binom{100}{100} \times 0,93^{100} \times 0,07^{100} \approx 0,99.$
   La probabilité qu'au moins 2 composants soient hors d'usage est égale à 0,99.

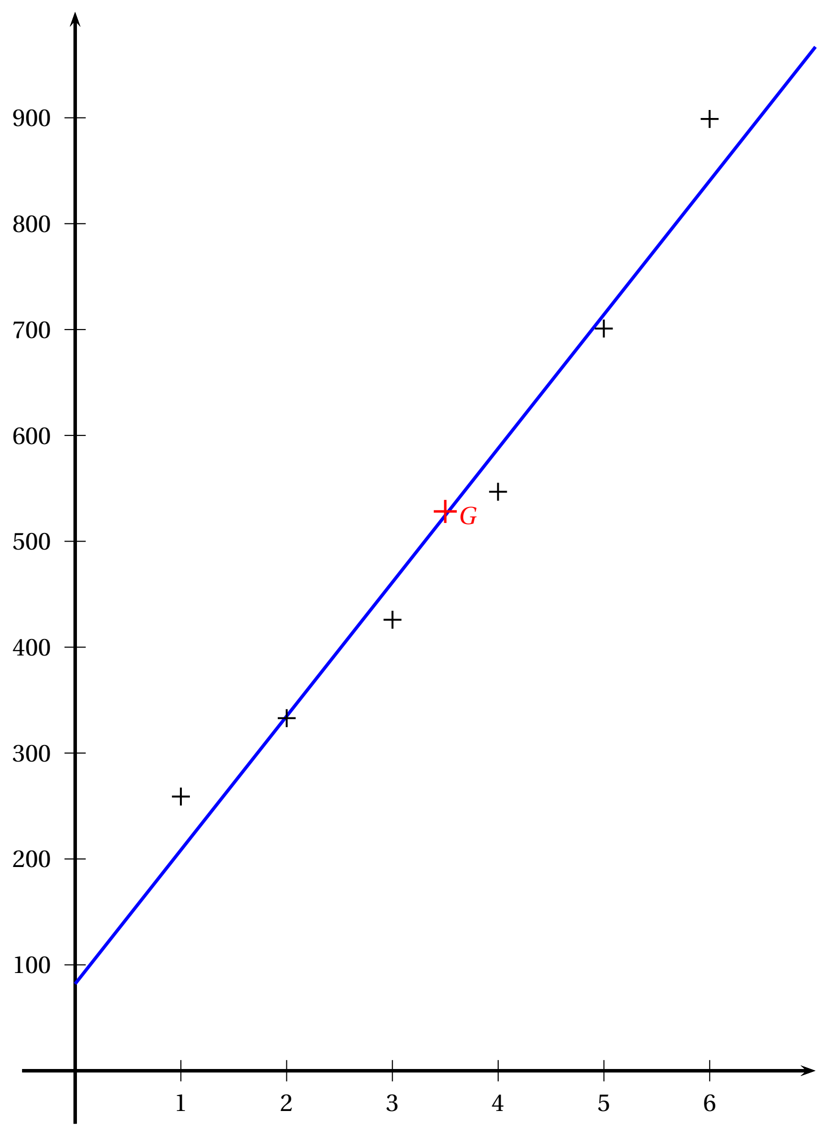
Partie C

1. $P(89 \leqslant Z \leqslant 95) = 0{,}725\,2$.
2. $P(Z > 89) = 1 - P(Z \leqslant 89)$; $P(Z > 89) = 0{,}941\,6$
3. $P(Z \geqslant n) = 1 - P(Z < n) = 0,975$; $-p(Z < n) = 0,975 - 1$; $p(Z < n) = 0,025$.
   Par la calculatrice, on obtient $n = 88$.

Exercice 2 **11 points**

Partie A

1. Nuage de points



2. Par la calculatrice, on obtient l'équation de la droite de régression de y en t est : $y = 126,429t + 82$.
   Le coefficient de corrélation linéaire est égal à $r = 0,984$.
3. Voir le graphique : la droite passe par les points de coordonnées (0 ; 82) et (5 ; 714,145)
4. Coordonnées du point moyen G :
   $x_G = \dfrac{1+2+3+4+5+6}{6} = \dfrac{21}{6} = 3,5$;
   $y_G = \dfrac{256+330+423+544+698+896}{6} = \dfrac{3147}{6} = 524,5$. Donc $G(3,5\ ;\ 524,5)$.
5. 2 ans après le lancement correspondent à $t = 8$;
   $y = 126,429 \times 8 + 82 \approx 1\,093$.
   Le nombre de machines vendues 2 ans après le lancement est estimé à 1 093.

Partie B

1. $u_3 = u_1 \times q^2$ $u_3 = 256q^2$.
2. $q^2 = \dfrac{423}{256} \Rightarrow q = \sqrt{\dfrac{423}{256}} \approx 1,29$.
3. On admet que $u_n = 256 \times 1,28^{n-1}$ pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.
   a. 2 ans après le lancement correspondent à $n = 8$ donc $u_8 = 256 \times 1,288 - 1 = 256 \times 1,28^7 \approx 1\,441$.
   Le nombre de machines vendues est estimé à 1 441.
   b. Il faut résoudre l'inéquation $u_n > 2\,000$ soit $256 \times 1,28^{n-1} > 2\,000$ ou $1,28^{n-1} > 2\,000$.
   En passant par le logarithme népérien, on a :
   $\ln(1,28n - 1) > \ln\left(\dfrac{2\,000}{256}\right)$, car la fonction ln est croissante sur $]0\ ;\ +\infty[$:
   $(n-1)\ln(1,28) > \ln\left(\frac{2\,000}{256}\right)$
   $n - 1 > \frac{\ln\left(\frac{2\,000}{256}\right)}{\ln(1,28)}$
   $n > 1 + \frac{\ln\left(\frac{2\,000}{256}\right)}{\ln(1,28)}$
   Finalement $n > 9,32$; n est un entier donc $n = 10$.
   C'est à partir du dixième trimestre que la quantité de machines dépassera 2 000 machines
   $n = 9$: $u_9 = 256 \times 1,288 \approx 1\,845$.
   $n = 10$: $u_{10} = 256 \times 1,289 \approx 2\,361$.

Partie C

1. $u_n = 256 \times 1,28^{n-1}$; $u_n = \dfrac{256 \times 1,28^n}{1,28} = 200 \times 1,28^n$.
   Or $\ln(1,28n) = n\ln(1,28)$ et $\mathrm{e}^{\ln\left(1,28^n\right)} = 1,28^n = \mathrm{e}^{n\ln(1,28)} = \mathrm{e}^{0,25n}$.
   $u_n = 200 \times \mathrm{e}^{0,25n}$.
   Il est exact de modéliser la quantité de machines par $u_n = f(n)$ avec $f(x) = 200\mathrm{e}^{0,25x}$, f étant définie sur l'intervalle [1 ; 10]
2. **a.** $f'(x) = 200 \times 0,25 \times \mathrm{e}^{0,25x} = 50\mathrm{e}^{0,25x}$.
   $50 > 0$ et $\mathrm{e}^{0,25x} > 0$ donc $f'(x) > 0$: la fonction f est strictement croissante sur [1 ; 10].

b. Il faut résoudre l'inéquation suivante $f(x) > 5000$, soit

$200\mathrm{e}^{0,25x} > 5000$ ou $\mathrm{e}^{0,25x} > \dfrac{5000}{200}$ ou

$\mathrm{e}^{0,25x} > 25$; donc

$\ln\left(\mathrm{e}^{0,25x}\right) > ln(25)$, la fonction logarithme népérien étant croissante sur $[1\,;\,10\,]$

$0,25x > \ln(25)$ soit $x > \frac{\ln(25)}{0,25}$ soit $x > 12,87$.

$f(12) = 200\mathrm{e}^{0,25\times 12} = 200\mathrm{e}^{3} \approx 4017$.

$f(13) = 200\mathrm{e}^{0,25\times 13} = 200\mathrm{e}^{3,25} \approx 5158$.

$x = 12$ correspond à un nombre de trimestres égal à 12 soit 3 ans.

Au delà de la troisième année, le modèle ne pourra plus convenir.

c. $I = \displaystyle\int_1^{10} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{10} \left(200\mathrm{e}^{0,25x}\right)\,\mathrm{d}x$

$I = \left[\dfrac{200}{0,25}\mathrm{e}^{0,25x}\right]_1^{10} = \left[800\mathrm{e}^{0,25x}\right]_1^{10} = 800\left(\mathrm{e}^{0,25\times 10} - \mathrm{e}^{0,25\times 1}\right] = 800\left(\mathrm{e}^{2,5} - \mathrm{e}^{0,25}\right)$.

d. $V_m = \dfrac{1}{10-1} \times I = \dfrac{1}{9}I = \dfrac{800}{9}\left(\mathrm{e}^{2,5} - \mathrm{e}^{0,25}\right) \approx 969$.

La valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1\,;\,10]$ est égal à 969.